۱. خطاها

فرض کنیم A یک عدد حقیقی و a تقریب آن باشد. $e = A - a$ را **خطا (Error)** می‌نامیم.

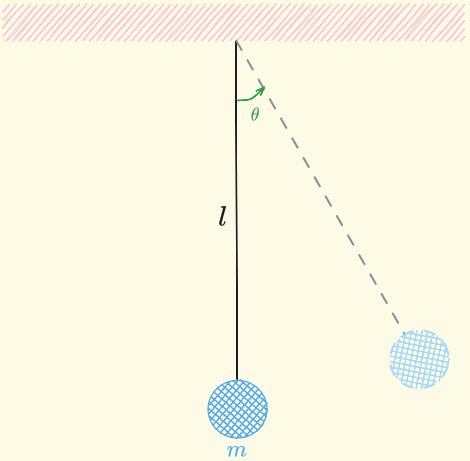
مثال

$A = \sqrt{2}$
$a = 1.41$
$e = \sqrt{2} - 1.41$

منشأ خطا

مثال

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



دلایل خطا:

1. اصطکاک هوا
2. محاسبات (π، $\sqrt{\ }$، l)
3. تقریب g
4. دقت اندازه‌گیری
5. جرم l
6. اصطکاک نقطهٔ آویز
7. زاویهٔ نوسان
8. کشسانی نخ

انواع خطا (از نظر محاسباتی)

1. **خطای مطلق (Abstract Error)** یا **اندازهٔ خطا**:

$$e(a) = e(A) = |A - a|$$

2. **خطای نسبی (Relative Error)** یا **خطا در مقیاس واحد**: خطای نسبی، دقت محاسبه را به دست می‌دهد.

$$\delta(A) = \delta(A) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{e(a)}{|a|}$$

مثال

$$A = 10000, a = 9999$$
$$\begin{cases} e(A) = 1 \\ \delta(A) = \dfrac{1}{10000} \end{cases}$$

$$A = 2, a = 1$$
$$\begin{cases} e(A) = 1 \\ \delta(A) = 1 \text{ or } \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

نمایش اعداد در دستگاه‌های محاسباتی

۱.روش نماد علمی

در این روش هر عدد به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$A = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_t \cdots \times \beta^E \qquad \begin{cases} 1 \le a_1 \le \beta - 1 \\ 0 \le a_i \le \beta - 1 \quad (i \ne 1) \\ L \le E \le M \end{cases}$$

مثال

$$A = 2.413275 \to A = +0.2413275 \times 10^1$$

فرض کنیم در یک سیستم محاسباتی، t تعداد ارقام، M کران بالا و L کران پایین باشند و عدد $A = \pm 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_t a_{t+1} a_{t+2} \cdots \times \beta^E$ داده شده باشد. دو روش وجود دارد:

1. **روش قطع کردن (Chopping):**
کران خطا:

$$\begin{aligned} |e| &\le \left(\frac{\beta - 1}{\beta^{t+1}} + \frac{\beta - 1}{\beta^{t+2}} + \dots \right) \beta^E \\ &= \frac{\beta - 1}{\beta^{t+1}} \left(1 + \frac{1}{\beta} + \dots \right) \beta^E \\ &= \frac{\beta - 1}{\beta^{t+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta}} \beta^E \\ &= \beta^{E-t} \end{aligned}$$

$$\delta(a) = \frac{e(A)}{A} \le \frac{\beta^{E-t}}{\underbrace{0.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \cdots \times \beta^E}_{\underbrace{\ge 0.1\,0000}_{\frac{1}{\beta}} \times \beta^E}} = \beta^{-t+1}$$

2. **روش گرد کردن (Rounding):**

- اگر $a_{t+1} > \dfrac{\beta}{2}$:
$$a = \pm 0.a_1 a_2 \dots (a_t + 1) \times \beta^E$$
- اگر $a_{t+1} < \dfrac{\beta}{2}$:
$$a = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_t \times \beta^E$$
- اگر $a_{t+1} = \dfrac{\beta}{2}$:
  - اگر $a_t = 2k$ (زوج باشد):
  $$a = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_t \times \beta^E$$
  - اگر $a_t = 2k + 1$ (فرد باشد):
  $$a = \pm 0.a_1 a_2 \dots (a_t + 1) \times \beta^E$$

$$\delta(a) \leq \frac{\beta^{-t}}{2}$$

سؤال

در مبنای ده‌دهی، اعداد زیر را تا سه رقم اعشار به روش گرد کردن تقریب بزنید:

$A = 4122.7751 \times 10^3$
$B = 0.0000314975 \times 10^8$
$C = 0.21750006 \times 10^2$
$D = 0.2175 \times 10^2$
$E = 0.2185 \times 10^2$

$A = 0.4122751 \times 10^7 \approx 0.412 \times 10^7$
$B = 0.314975 \times 10^4 \approx 0.315 \times 10^4$
$C \approx 0.218 \times 10^2$
$D \approx 0.218 \times 10^2$
$E \approx 0.218 \times 10^2$

سؤال

فرض کنیم $t = 3$، $M = 255$ و $L = -255$. در این صورت بگویید عدد $A = 0.000217/4 \times 10^{-253}$ در کامپیوتر چه عددی خوانده می‌شود؟ عدد $B = 31.4175 \times 10^{254}$ چه‌طور؟

$A = -0.2174 \times 10^{-256} = 0$ (Underflow)
$B = 0.314175 \times 10^{256} = \exists$ (Overflow)

سؤال

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اندازهٔ عدد حقیقی در یک کامپیوتر با مشخصات L و M و t در مبنای β چیست؟

$$U = \pm 0.\underbrace{(\beta-1)(\beta-1)\ldots(\beta-1)}_{t \text{ digits}} \times \beta^M$$
$$L = \pm 0.\underbrace{1000\ldots0}_{t \text{ digits}} \times \beta^L$$

سؤال

تعداد اعداد ماشینی برای کامپیوتر فوق کدام است؟

$$N = 2 \times (\beta-1)\beta^{t-1}(M-L+1)$$

دقت ماشین

اگر $\delta > 0$ کوچک‌ترین عددی باشد که $1 + \delta > 1$، آن‌گاه δ را **دقت ماشین** می‌نامند.

سؤال

فرض کنیم در یک محاسبهٔ ممیز ثابت با دقت سه رقم اعشار کار کنیم. در این صورت دقت ماشین کدام است؟

$$1 + 0.0004 = 1.0004 = 1$$
$$1 + 0.000049 = 1$$
$$1 + 0.0000499999 = 1$$
$$1 + 0.00005 = 1.00005$$

بنابراین دقت ماشین $\delta = 0.0005$ است.

فرض کنیم تابع f یک تابع پیوسته در $\mathbb{R}^n$ و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته باشد. مقادیر واقعی را با x و y و مقادیر تقریبی را با X و Y نمایش می‌دهیم.

رابطهٔ بین مقادیر واقعی و تقریبی به‌صورت $X = x + \Delta x$ و $Y = y + \Delta y$ است که در آن Δx و Δy خطاهای مطلق متغیرها هستند. فرض می‌کنیم سقف خطای اندازه‌گیری برای هر متغیر برابر با δ باشد، یعنی $|\Delta x|, |\Delta y| \leq \delta$.

برای محاسبهٔ مقدار تابع در نقاط تقریبی $f(X, Y)$، از بسط تیلور تابع حول نقطهٔ (x, y) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \dots \end{aligned}$$

چون Δx و Δy مقادیر بسیار کوچکی هستند، می‌توان از جملات مرتبهٔ دوم و بالاتر صرف‌نظر کرد.

خطای مطلق تابع f برابر است با:

$$\begin{aligned} e(f(x, y)) &= |f(X, Y) - f(x, y)| \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y \end{aligned}$$

طبق نامساوی مثلثی و با توجه به این‌که $|\Delta x|, |\Delta y| \leq \delta$، کران بالای خطای مطلق به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e(f(x, y)) \leq (|f_x(x, y)| + |f_y(x, y)|)\delta$$

کران بالای خطای نسبی تابع نیز به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta(f(x, y)) \leq \frac{(|f_x(x, y)| + |f_y(x, y)|)\delta}{|f(x, y)|}$$

سؤال

کران بالای خطای مطلق و خطای نسبی جمع و ضرب دو عدد حقیقی را بیابید.

فرض کنیم تابع به صورت $f(x, y) = x + y$ باشد. مشتقات جزئی آن عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

خطای مطلق:

$$e(x + y) \approx |1 \times \Delta x + 1 \times \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = e(x) + e(y)$$

خطای نسبی:

$$\delta(x + y) = \frac{e(x + y)}{|x + y|} \leq \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x + y|} \leq \frac{2\max\{|\Delta x|, |\Delta y|\}}{2\min\{|x|, |y|\}} \leq \max\{\delta(x), \delta(y)\}$$

فرض کنیم تابع به صورت $f(x,y) = xy$ باشد. مشتقات جزئی آن عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$$

خطای مطلق:

$$e(xy) \approx |y\Delta x + x\Delta y| \leq |y||\Delta x| + |x||\Delta y|$$

خطای نسبی:

$$\delta(xy) \leq \frac{|y||\Delta x| + |x||\Delta y|}{|xy|} = \frac{|y||\Delta x|}{|x||y|} + \frac{|x||\Delta y|}{|x||y|} = \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} \leq \delta(x) + \delta(y)$$

سؤال

فرض کنید در یک ماشین‌حساب با دقت ۳ رقم اعشار در مبنای ۱۰ می‌خواهیم مساحت کل یک استوانه با شعاع $r = \sqrt{2}$ و ارتفاع $h = \dfrac{5}{e}$ را محاسبه کنیم. حداکثر دقت محاسبه را تعیین کنید.

فرمول مساحت کل استوانه:

$$S(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$$

برای محاسبه خطا، متغیرهای مسئله را به‌صورت $x = \pi$، $y = r$ و $z = h$ تعریف می‌کنیم. بنابراین تابع موردنظر به شکل زیر خواهد بود:

$$f(x,y,z) = 2xy(y+z)$$

خطای مطلق:

$$e(f) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = |2y(y+z)| + |2x(2y+z)| + |2xy|$$

خطای نسبی:

$$\begin{aligned}
\delta(f) &\leq \frac{2y(y+z)|\Delta x|}{2xy(y+z)} + \frac{(4xy+2xz)|\Delta y|}{2xy(y+z)} + \frac{2xy|\Delta z|}{2xy(y+z)} \\
&= \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{2y+z}{y(y+z)}|\Delta y| + \frac{1}{y+z}|\Delta z| \\
&= \delta(x) + \frac{2y+z}{y+z}\cdot\frac{|\Delta y|}{y} + \frac{z}{y+z}\cdot\frac{|\Delta z|}{z} \\
&= \delta(x) + \left(1 + \frac{y}{y+z}\right)\delta(y) + \left(\frac{z}{y+z}\right)\delta(z) \\
&\leq \delta(x) + 2\delta(y) + \delta(z) \\
&\leq 4\delta
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم ماشین‌حساب تا ۳ رقم اعشار گرد می‌کند (دقت ۴ رقم با معنی برای اعداد حدود ۱)، مقدار خطای گرد کردن برابر است با $\delta = 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$. پس

$$\delta(f) = 4 \times 0.0005 = 0.002$$

بنابراین حداکثر خطای نسبی حدود 0.002 یا 0.2% است.

۲. حل عددی معادلات غیرخطی

هدف: حل $f(x) = 0$ به روش عددی

α را **ریشهٔ حقیقی** معادلهٔ $f(x) = 0$ می‌نامیم هرگاه $f(\alpha) = 0$. از نظر هندسی ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x) = 0$ محل تقاطع منحنی با محور xهاست.

α را **ریشهٔ تکراری** مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x) = 0$ می‌نامیم هرگاه $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ و $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
اگر $m = 1$ ریشه را ساده (Simple Root) می‌نامیم.
اگر $m = 2$ ریشه را مضاعف (Multiple Root) می‌نامیم.

مثال

$x = \pm 2$ ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $x^2 = 4$ هستند.

$$f(x) = x^2 - 4 \implies f(2) = 0$$
$$f'(x) = 2x \implies f'(2) = 4 \neq 0$$

سؤال

مرتبهٔ تکرار ریشهٔ $x = 0$ را برای معادلهٔ $x = \sin x$ بیابید.

$$f(x) = x - \sin x \implies f(0) = 0$$
$$f'(x) = 1 - \cos x \implies f'(0) = 0$$
$$f''(x) = \sin x \implies f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = \cos x \implies f'''(0) = 1 \neq 0$$

بنابراین $x = 0$ ریشهٔ مرتبهٔ ۳ معادله است.

قضیه

اگر α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه تابع h موجود است به قسمی که

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x) \qquad , \qquad h(\alpha) \neq 0$$

یعنی اگر α چند بار ریشهٔ یک معادله باشد، ما می‌توانیم آن معادله را طوری بازنویسی کنیم که تمام آن تکرارها را به صورت یک عامل جداگانه بیرون بکشیم. چیزی که باقی می‌ماند (یعنی تابع $h(x)$)، دیگر آن ریشه را ندارد.

مثال

$$f(x) = x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right) = x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots\right) = (x - 0)^3 h(x)$$

برای یافتن ریشه‌های تقریبی یک معادله

1. **تعیین محدوده‌ها:** لازم است یک محدودهٔ متناهی از اعداد حقیقی را تعیین کنیم که معادله در آن محدوده دقیقاً یک ریشه داشته باشد.
2. **روش‌های عددی تقریب ریشه‌ها:** از یک روش (تکنیک) عددی برای یافتن تقریبی از ریشهٔ موردنظر با دقت مطلوب استفاده می‌کنیم.

تعیین محدوده‌ها

۱. روش ترسیمی

با استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی (مانند متلب، میپل، متمتیکا یا مین‌تب و ...) منحنی $y = f(x)$ را در بازه‌های مختلف $[a, b]$ رسم می‌کنیم و از روی نمودار آن، در تعداد و محل تلاقی ریشه‌ها بحث می‌کنیم.

گاهی $f(x) = 0$ را به‌صورت $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$ تبدیل می‌کنیم. سپس، منحنی‌های $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ را هم‌زمان رسم می‌کنیم. ریشهٔ معادله، محل تقاطع نمودار دو تابع است.

۲. روش جدول‌بندی

در این روش از خواص توابع و قضایای ریاضی برای تشخیص تعداد و محل تقریبی ریشه‌ها استفاده می‌شود.

1. پیوستگی
2. زوج و فرد بودن
3. دامنه
4. برد
5. یکنوایی
6. قضیهٔ مقدار میانی
7. قضیهٔ مقدار میانگین
8. قضیهٔ رول
9. قضیهٔ یکنوایی

سؤال

در تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $x + \sin x - 0.5 = 0$ بحث کنید.

می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$. بنابراین $x - 1.5 \leq x + \sin x - 0.5 \leq x + 0.5$.

1. اگر $x + 0.5 < 0$ آن‌گاه $x < -0.5$ و بنابراین $f(x) = 0$ ریشه ندارد.
2. اگر $x - 1.5 > 0$ آن‌گاه $x > 1.5$ و بنابراین $f(x) = 0$ ریشه ندارد.

بنابراین ریشه یا ریشه‌های $f(x)$ باید در بازهٔ -0.5 تا 1.5 باشد.

$f(-0.5) \approx -1.4794$
$f(1.5) \approx 1.9975$

می‌دانیم f در $[-0.5, 1.5]$ پیوسته است. بنابراین طبق مقادیر بالا، f در بازهٔ $[-0.5, 1.5]$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حال داریم $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$. بنابراین f صعودی است. بدین ترتیب تابع دقیقاً یک ریشه دارد.

سؤال

در تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $x \sin x = 1$ بحث کنید.

با رسم این تابع در بازه‌های مختلف می‌فهمیم این معادله بی‌شمار ریشه دارد.
با رسم دو تابع $f_1(x) = \sin x$ و $f_2(x) = \frac{1}{x}$ می‌توانیم حدود اولین ریشهٔ مثبت آن را پیدا کنیم.
می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$. بنابراین $-1 - \frac{1}{x} \leq \sin x - \frac{1}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$.

...

روش‌های عددی تقریب ریشه‌ها

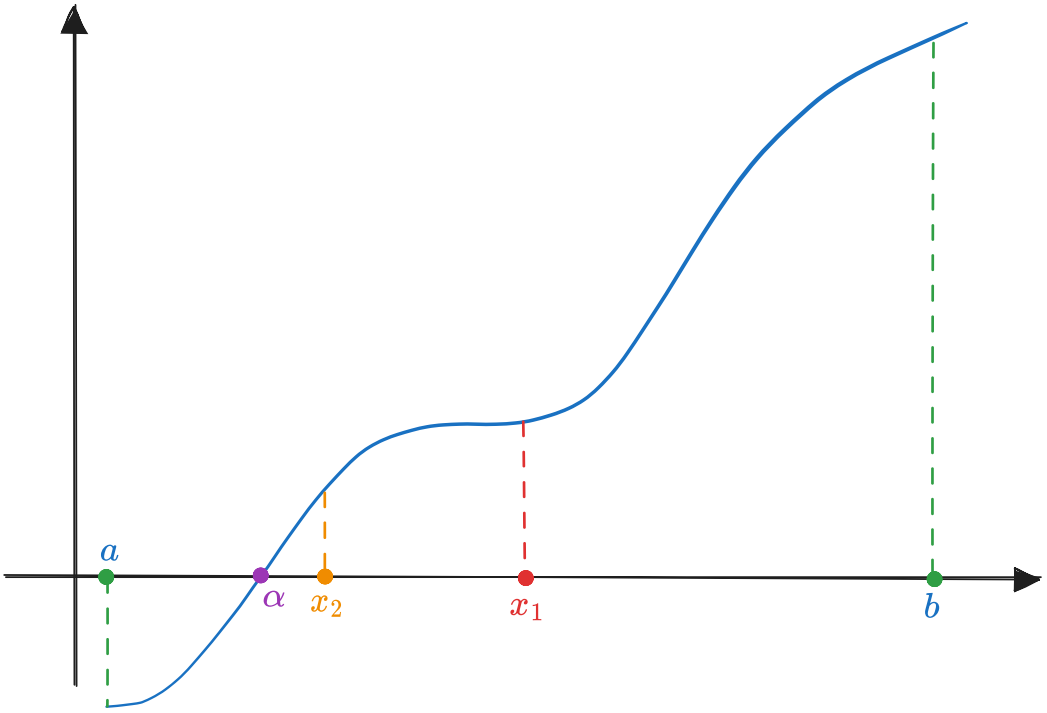
۱. روش تنصیف (دوبخشی)

برای اجرای این روش سه شرط زیر لازم است:

1. f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.
2. f بر $[a,b]$ ریشهٔ منحصربه‌فرد داشته باشد.
3. $f(a)f(b) < 0$ باشد.

الگوریتم:

1. وسط بازه را پیدا می‌کنیم: $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. سه حالت رخ می‌دهد:
   1. $f(a)f(x_1) = 0$: در این صورت، x_1 همان ریشهٔ مدنظر است.
   2. $f(a)f(x_1) < 0$: در این صورت، ریشه در بازهٔ (a, x_1) قرار دارد. قرار می‌دهیم $b = x_1$.
   3. $f(a)f(x_1) > 0$: در این صورت، ریشه در بازهٔ (x_1, b) قرار دارد. قرار می‌دهیم $a = x_1$.
2. در صورتی که ریشه در مرحلهٔ قبلی یافت نشده باشد، با a و b جدیدِ به‌دست‌آمده مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم.



سؤال

می‌دانیم $x = 2$ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x^3 - 8 = 0$ است. با انتخاب $a = 0$ و $b = 2.3$، با انجام ۴ تکرار، تقریبی از ریشه را به روش تنصیف به دست آورید. (کلیهٔ محاسبات با دقت ۴ رقم اعشار گرد شود.)

n	a	x_n	b	$f(a)f(x_n)$
1	0	1.150	2.3	$+$
2	1.150	1.725	2.3	$+$
3	1.725	2.0125	2.3	$-$
4	1.725	1.8688	2.0125	

$f(0) = -8$
$f(2.3) = 4.167$
$x_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+2.3}{2} = 1.150$
$f(1.15) = -6.4791 < 0$

$$x_2 = \frac{2.3 + 1.15}{2} = 1.725$$
$$f(1.725) = -2.8670 \implies f(1.15)f(1.725) > 0$$
$$x_3 = \frac{1.725 + 2.3}{2} = 2.0125$$
$$f(2.0125) = 0.1509 \implies f(2.0125)f(1.725) < 0$$
$$x_4 = \frac{1.725 + 2.0125}{2} = 1.8688$$

قضیه

روش تنصیف همگراست.

به‌وضوح داریم

- $|x - \alpha| < \frac{b-a}{2}$
- $|x_2 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2}$
- $\vdots$
- $|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$

بنابراین داریم

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

و بنابر قضیهٔ ساندویچ نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

معیارهای توقف

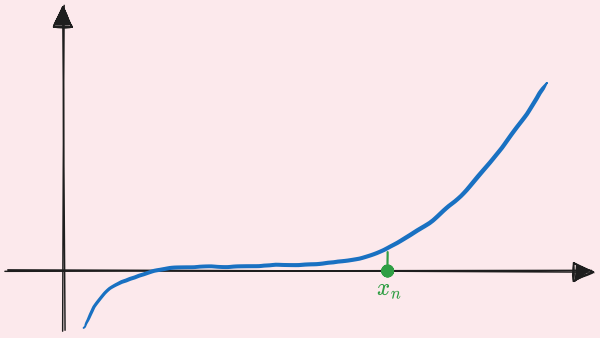
فرض کنیم ε دقت موردنظر باشد. (مثلاً اگر بخواهیم تقریب ریشه با دقت n رقم اعشار دقیق باشد، تعریف می‌کنیم $\varepsilon = \frac{10^{-n}}{2} = 5 \times 10^{-n-1}$.) در این صورت:

1. تکرارها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $|f(x_n)| < \varepsilon$ شود.
2. تکرارها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ شود. **(استانداردترین روش)**
3. تعداد تکرارها از قبل معلوم باشد. **(روش مکمل)**
4. تکرارها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$ شود. **(ویژهٔ روش تنصیف)**

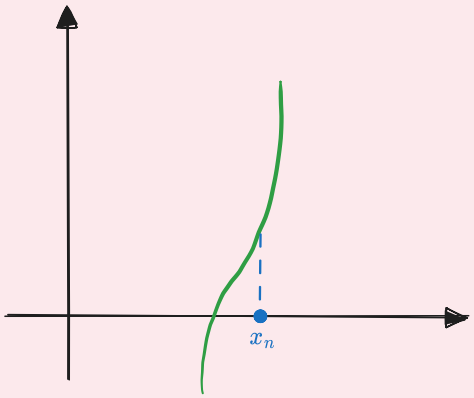
$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \implies \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^n \implies \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \leq n$$

اشکال هر روش

1. در حالتی که در نزدیکی ریشه به حالت مجانبی می‌رسیم، خطا زیاد می‌شود.



2. در حالتی که در نزدیکی ریشه شیب زیادی داریم (مجانب عمودی)، خطا زیاد می‌شود.



3. دقت پایین است.

۲. روش نابه‌جایی (خط قاطع)

برای اجرای این روش سه شرط زیر لازم است:

1. f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.
2. f بر $[a,b]$ ریشهٔ منحصربه‌فرد داشته باشد.
3. $f(a)f(b) < 0$ باشد.

الگوریتم:

1. وتر بین $\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}$ A و $\begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix}$ B را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ این وتر به‌صورت زیر است:

$$AB: \frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

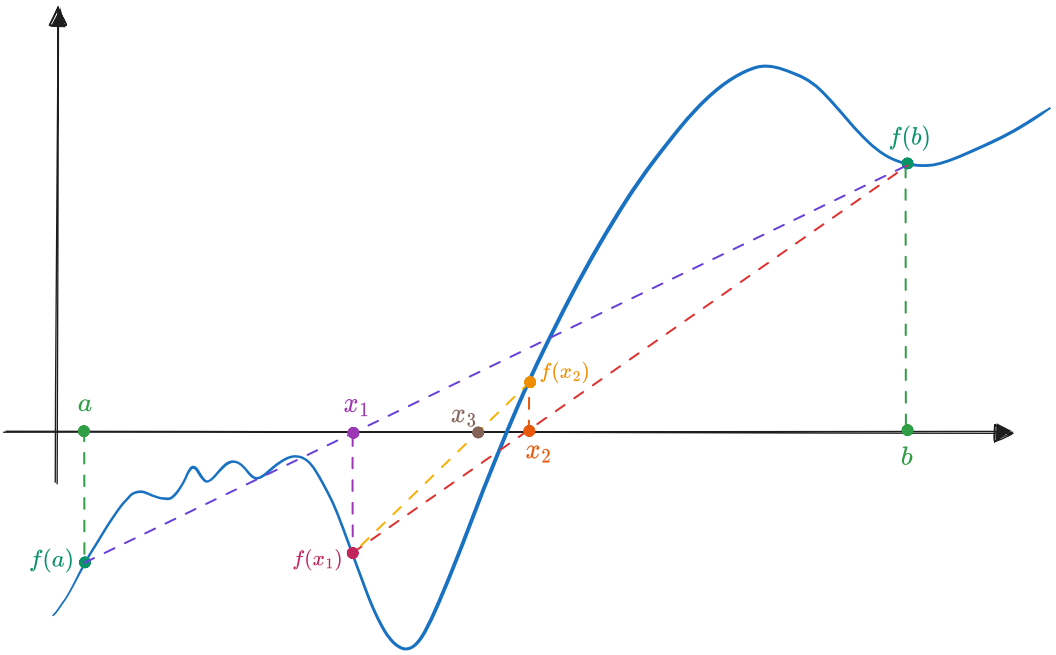
2. x_1 را نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که وتر AB محور xها را قطع می‌کند.

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

سه حالت رخ می‌دهد:

1. $f(a)f(x_1) = 0$: در این صورت، x_1 همان ریشهٔ مدنظر است.
2. $f(a)f(x_1) < 0$: در این صورت، ریشه در بازهٔ (a, x_1) قرار دارد. قرار می‌دهیم $b = x_1$.
3. $f(a)f(x_1) > 0$: در این صورت، ریشه در بازهٔ (x_1, b) قرار دارد. قرار می‌دهیم $a = x_1$.

3. در صورتی که ریشه در مرحلهٔ قبلی یافت نشده باشد، با a و b جدیدِ به‌دست‌آمده مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم.



سؤال

معادلهٔ $x^3 - 8 = 0$ را در بازهٔ $[0, 2.3]$ با انجام چهار تکرار به روش نابه‌جایی حل کنید.

$f(a)f(x_n)$	b	x_n	a	n
$+$	2.3	1.5123	0	1
$+$	2.3	1.9230	1.5123	2
$-$	2.3	2.0357	1.9230	3
	2.0357	1.9986	1.9230	4

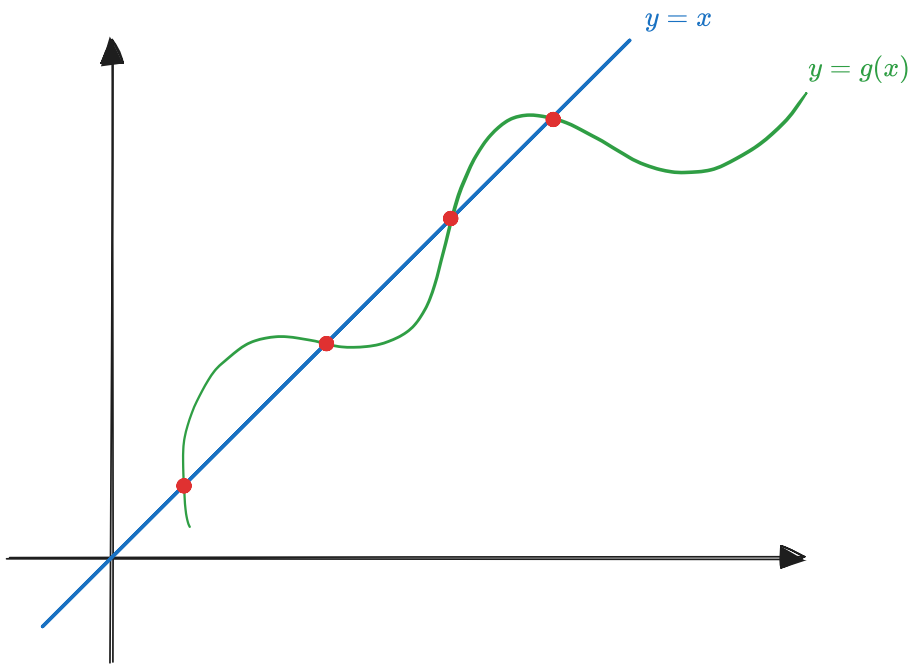
$$f(0) = -8$$
$$f(2.3) = 4.1670$$
$$x_1 = \frac{0 \times 4.1670 - 2.3 \times (-8)}{4.1670 + 8} = 1.5123$$
$$f(1.5123) = -4.5413$$
$$x_2 = \frac{1.5123 \times 4.1670 - 2.3 \times (-4.5413)}{4.1670 + 4.5413} = 1.9230$$
$$f(1.9230) = -0.8889$$
$$x_3 = \frac{1.9230 \times \frac{4.1670}{2} - 2.3 \times (-0.8889)}{\frac{4.1670}{2} + 0.8889} = 2.0357$$
$$f(2.0357) = 0.4361$$
$$x_4 = \frac{1.9230 \times 0.4361 - 2.0357 \times (-0.8889)}{0.4361 + 0.8889} = 1.9986$$

تبصره

اگر در سه یا چهار تکرار الگوریتم، یکی از نقاط a یا b ثابت بماند (مثلاً b)، در این صورت، در تکرار چهارم یا پنجم به جای استفاده از $f(b)$ از $\frac{f(b)}{2}$ در فرمول استفاده می‌کنیم تا سرعت الگوریتم بالاتر رود.

۳. روش تکرار ساده (نقطهٔ ثابت)

α را **نقطهٔ ثابت** تابع $y = g(x)$ می‌نامیم هرگاه $\alpha = g(\alpha)$ (یعنی محل تقاطع منحنی با نیم‌ساز ربع اول و سوم).



در این روش معادلهٔ $f(x) = 0$ را به‌صورت $x = g(x)$ چنان تبدیل می‌کنیم که اگر $f(\alpha) = 0$، آن‌گاه $\alpha = g(\alpha)$ (یعنی ریشه‌های معادله نباید تغییر کنند و حذف شوند).

الگوریتم:

1. معادلهٔ $f(x) = 0$ را به فرم نقطهٔ ثابت $x = g(x)$ بازنویسی می‌کنیم.
2. یک نقطهٔ دلخواه انتخاب می‌کنیم.
3. دنباله‌ای از تقریب‌ها را با استفاده از فرمول بازگشتی زیر تولید می‌کنیم:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

4. تکرار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یک شرط توقف برآورده شود، مثلاً:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

که در آن ε یک مقدار کوچک به‌عنوان دقت مطلوب است. در این صورت، x_{n+1} به‌عنوان ریشهٔ تقریبی پذیرفته می‌شود.

سؤال

می‌دانیم $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + x - 1 = 0$. با انتخاب $x_0 = 0.5$ تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ فوق را بیابید. (با دقت ۴ رقم اعشار)

$$x = 1 - x^2 \implies g_1(x) = 1 - x^2$$

$x_{n+1} = g_1(x_n)$	n
0.5	0
0.75	1
0.4375	2
0.8086	3
0.3462	4
0.8801	5
0.225	6

$x_{n+1} = g_1(x_n)$	n
0.9492	7

$$x^2 = 1 - x \implies g_2(x) = \sqrt{1-x}$$

$x_{n+1} = g_2(x_n)$	n
0.5	0
0.7071	1
0.5412	2
0.6773	3
0.5681	4
0.6572	5
$\vdots$	$\vdots$
0.61803	41

$$x(x+1) = 1 \implies g_3(x) = \frac{1}{1+x}$$

$x_{n+1} = g_3(x_n)$	n
0.5	0
0.6667	1
0.6	2
0.625	3
0.6154	4
0.6190	5
0.6177	6
0.6182	7
0.61803	8

$$2x^2 + x = x^2 + 1 \implies g_4(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$$

$x_{n+1} = g_1(x_n)$	n
0.5	0
0.625	1
0.6181	2
	3
0.61803	4

قضیهٔ تکرار ساده (نقطهٔ ثابت)

قضیه

فرض کنیم g از $[a,b]$ به $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. در این صورت معادلهٔ $x = g(x)$ دارای حداقل یک ریشه در بازهٔ $[a,b]$ است.

اگر $g(a) = a$ یا $g(b) = b$ قضیه ثابت‌شده است.
در غیر این‌صورت تعریف می‌کنیم $h(x) = g(x) - x$. داریم:

1. h در $[a,b]$ پیوسته است.
2. چون $g(a) > a$ پس $h(a) = g(a) - a > 0$.
3. چون $g(b) < b$ پس $h(b) = g(b) - b < 0$.

بنا بر قضیهٔ مقدار میانی، معادلهٔ $h(x) = 0$ دارای حداقل یک ریشه است.

قضیه

فرض کنیم تابع g از $[a,b]$ به $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. اگر g در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و عدد ثابت L وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $|g'(x)| \leq L < 1$، آن‌گاه $g(x) = x$ ریشهٔ منحصربه‌فرد دارد.

تعریف می‌کنیم $h(x) = g(x) - x$. داریم $h'(x) = g'(x) - 1$، بنابراین $h'(x) < 0$. در نتیجه h یک تابع اکیداً نزولی است. بدین ترتیب ریشهٔ موردنظر منحصربه‌فرد است.

قضیه

اگر مفروضات دو قضیهٔ قبلی برقرار باشد، آن‌گاه دنبالهٔ $x_{n+1} = g(x_n)$ به‌ازای هر انتخاب دلخواه x_0 از $[a,b]$ به ریشهٔ معادلهٔ $g(x) = x$ همگراست.

فرض کنیم α ریشهٔ معادله باشد، یعنی $g(\alpha) = \alpha$. در این صورت طبق تعریف دنباله داریم

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)|$$

قضیهٔ مقدار میانگین (لاگرانژ)

برای یک تابع مشتق‌پذیر مانند g در بازه‌ای مشخص، رابطه‌ای به‌صورت زیر وجود دارد

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و b است.

بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین داریم

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)(x_n - \alpha) \implies |g(x_n) - g(\alpha)| = |g'(c_n)||x_n - \alpha|$$

که در آن c_n عددی بین x_n و α است.

از دو عبارت قبل نتیجه می‌گیریم

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g'(c_n)||x_n - \alpha|$$

طبق قضیهٔ قبل می‌دانیم $|g'(x)| \leq L$. چون c_n نیز در همین بازه قرار دارد، پس $|g'(c_n)| \leq L$. پس داریم

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq L|x_n - \alpha|$$

حالا می‌توانیم نامساوی به‌دست‌آمده را به‌صورت بازگشتی برای مراحل قبل نیز اعمال کنیم تا به نقطهٔ شروع x_0 برسیم:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq L|x_n - \alpha| \leq L^2|x_{n-1} - \alpha| \leq L^3|x_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq L^{n+1}|x_0 - \alpha|$$

در نهایت، حد دو طرف نامساوی را وقتی $n \to \infty$ محاسبه می‌کنیم:

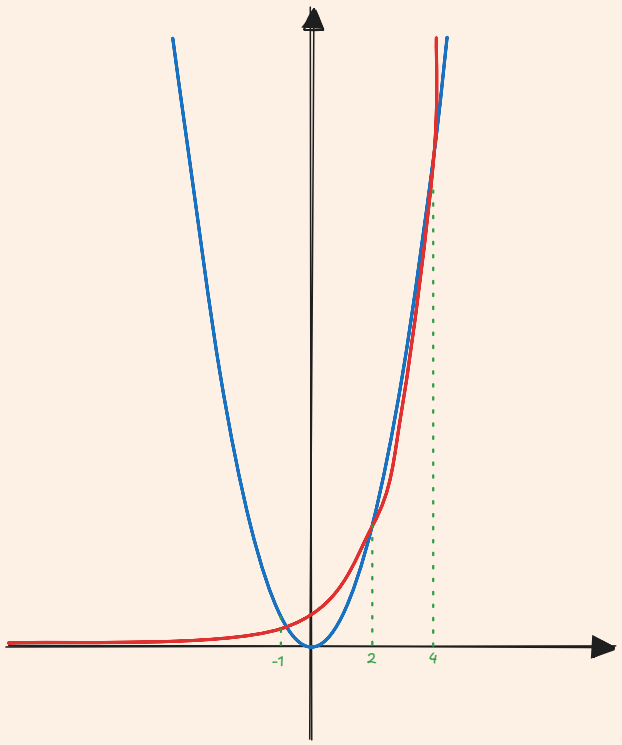
$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - \alpha| \leq \lim_{n\to\infty} L^{n+1}|x_0 - \alpha| \implies 0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - \alpha| \leq 0$$

طبق قضیهٔ فشردگی نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - \alpha| = 0$. پس دنبالهٔ (x_n) به α همگراست، یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

اگر دو تابع g داشته باشیم، مثلاً g_1 و g_2 به‌طوری‌که $|g_1'(x)| \leq L_1 < 1$ و $|g_2'(x)| \leq L_2 < 1$، آن‌گاه gـی را انتخاب می‌کنیم که L کوچک‌تری داشته باشد. در این صورت با سرعت بیشتری به ریشه می‌رسیم.

سؤال

می‌دانیم معادلهٔ $2^x = x^2$ در $[-1, 0]$ دارای ریشهٔ منحصربه‌فرد است. به روش تکرار ساده و انتخاب $x_0 = -0.5$ تقریبی از ریشهٔ موردنظر را با دقت دو رقم اعشار به دست آورید.



باید معادلهٔ $2^x - x^2 = 0$ را به فرم نقطهٔ ثابت $x = g(x)$ تبدیل کنیم. دو روش وجود دارد:

1. از طرفین لگاریتم طبیعی می‌گیریم:

$$\ln(2^x) = \ln(x^2) \implies x\ln 2 = 2\ln|x| \xlongequal{\alpha\in[-1,0]} x\ln 2 = 2\ln(-x) \implies x = \frac{2\ln(-x)}{\ln 2}$$

در این حالت $g_1(x) = \dfrac{2\ln(-x)}{\ln 2}$ است.

2. از طرفین معادله جذر می‌گیریم:

$$\sqrt{2^x} = \sqrt{x^2} \implies (2^x)^{\frac{1}{2}} = |x| \implies 2^{\frac{x}{2}} = |x| \xlongequal{\alpha\in[-1,0]} -x \implies x = -2^{\frac{x}{2}}$$

در این حالت $g_2(x) = -2^{\frac{x}{2}}$ است.

حالا شروط لازم را برای این دو تابع بررسی می‌کنیم:

- **تابع اول:** $g_1(x) = \dfrac{2\ln(-x)}{\ln 2}$

1. تابع $g_1(x)$ در نقطهٔ $x = 0$ تعریف نشده (حد آن به سمت $-\infty$ میل می‌کند). بنابراین، $g_1(x)$ در کل بازهٔ $[-1, 0]$ پیوسته نیست و شرط اول را برآورده نمی‌کند.
2. برد تابع $g_1(x)$ در بازهٔ $[-1, 0)$ برابر با $(-\infty, 0]$ است. این برد زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-1, 0]$ نیست، پس شرط دوم نیز برقرار نیست.

نتیجه: تابع $g_1(x)$ برای روش تکرار ساده در این بازه مناسب نیست.

- **تابع دوم:** $g_2(x) = -2^{\frac{x}{2}}$

1. تابع نمایی 2^u و تابع خطی $u = \dfrac{x}{2}$ در همه جا پیوسته هستند. ترکیب این توابع، یعنی $g_2(x) = -2^{x/2}$، نیز در همه جا، بنابراین در بازهٔ $I = [-1, 0]$، پیوسته است. این شرط برقرار است.
2. برد تابع $g_2(x)$ در بازهٔ $[-1, 0]$ برابر با $[g_2(0), g_2(-1)] = [-1, -1/\sqrt{2}] \approx [-1, -0.707]$ است. از آن‌جایی که بازهٔ $[-1, -0.707]$ به طور کامل در بازهٔ $[-1, 0]$ قرار دارد، شرط دوم نیز برقرار است.

نتیجه: تابع $g_2(x) = -2^{\frac{x}{2}}$ برای روش تکرار ساده مناسب است.

اجرای تکرار ساده:
با استفاده از رابطهٔ تکراری $x_{n+1} = -2^{\frac{x_n}{2}}$ و نقطهٔ شروع $x_0 = -0.5$ ریشه را تقریب می‌زنیم. تکرار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که دو تقریب متوالی در دو رقم اعشار یکسان باشند.

$x_{n+1} = -2^{\frac{x_n}{2}}$	n
-0.5	0
-0.8409	1
-0.7472	2
-0.7719	3
-0.7652	4
-0.7671	5

ریشهٔ معادله با دقت دو رقم اعشار برابر با $x \approx -0.77$ است.

مرتبهٔ همگرایی دنباله

فرض کنیم $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنبالهٔ همگرا به α باشد. هم‌چنین اگر اعداد مثبت، متناهی و ناصفر p و c موجود باشند به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = c \qquad c \neq 0, c \neq \infty$$

آن‌گاه p را **مرتبهٔ همگرایی دنباله** می‌نامند.

مرتبهٔ همگرایی معیاری برای تشخیص و مقایسهٔ سرعت همگرایی دو روش متفاوت به یک عدد است.

سؤال

مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $x_{n+1} = \sin x_n$ را بیابید.

اگر دنباله همگرا به α باشد، داریم $\alpha = \sin \alpha$ در نتیجه $\alpha = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n - 0}{(x_n - 0)^p} = \begin{cases} \infty & p > 1 \\ 1 & p = 1 \\ 0 & p < 1 \end{cases}$$

پس مرتبهٔ همگرایی 1 است.

نکته

اگر مرتبهٔ همگرایی 2 باشد، نسبت به مرتبهٔ همگرایی 1، سرعت ۱۰ برابر می‌شود.

سؤال

مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $x_{n+1} = x_n - \tan x_n$ در حالی‌که $x_0 = 0.1$ را بیابید.

اگر دنباله همگرا به α باشد، داریم $\alpha = \alpha - \tan\alpha$، پس $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \tan x_n - 0}{(x_n-0)^p} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^p} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2 x}{px^{p-1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sec^2 x \tan x}{p(p-1)x^{p-2}} \\
&= \frac{2}{p(p-1)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^{p-2}} \\
&= \begin{cases} 0 & p<3 \\ \frac{1}{3} & p=3 \\ \infty & p>3 \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی 3 است.

قضیه

فرض کنید $g(\alpha)=\alpha$، $g'(\alpha)\neq 0$ و $x_{n+1}=g(x_n)$ همگرا به α باشد. آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی روش تکرار ساده 1 است.

ثابت می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = c \qquad c\neq 0, c\neq\infty$$

داریم $x_{n+1}=g(x_n)$ و $\alpha=g(\alpha)$. بسط تیلور تابع g را در نقطهٔ x_n حول نقطهٔ α می‌نویسیم:

$$x_{n+1}=g(x_n)=\underbrace{g(\alpha)}_{\alpha}+g'(\alpha)(x_n-\alpha)+g''(c_n)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}+\dots$$

که c_n عددی بین α و x_n است. در نتیجه داریم

$$x_{n+1}-\alpha=g'(\alpha)(x_n-\alpha)+g''(c_n)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}+\dots$$

و داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g'(\alpha)(x_n-\alpha)+g''(c_n)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}}{(x_n-\alpha)^1} \\
&= \lim_{n\to\infty} g'(\alpha)+g''(c_n)\frac{\cancelto{0}{x_n-\alpha}}{2!} \\
&= |g'(\alpha)| = c
\end{aligned}$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی آن 1 است، زیرا مشتق اول ناصفر است.

سؤال

مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $x_{n+1}=\sin x_n$ را بیابید.

$$g(x)=\sin x$$
$$\alpha=0$$

$$g'(x)=\cos x \implies g'(0)=1\neq 0$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی 1 است.

مثال

مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $x_{n+1} = x_n - \tan x_n$ را بیابید.

$$g(x) = x - \tan x$$
$$\alpha = 0$$

$$g'(x) = 1 - \sec^2 x \implies g'(0) = 0$$
$$g''(x) = -2\sec^2 x \tan x \implies g''(0) = 0$$
$$g'''(x) = -4\sec^2 x \tan^2 x - 2\sec^4 x \implies g'''(0) = -2 \neq 0$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی 3 است.

سؤال

مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ با $x_0 = 1$ را بیابید.

$$g(x) = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$$
$$\alpha = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} \implies 2\alpha^2 = \alpha^2 + 2 \implies \alpha^2 = 2 \implies \alpha = \pm\sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \implies g'(\sqrt{2}) = 0$$
$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \implies g''(\sqrt{2}) \neq 0$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی 2 است.

۴. روش نیوتون-رافسون

ایدهٔ اول:
فرض کنیم α ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد؛ یعنی $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$.

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \implies x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

بنابراین داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ایدهٔ دوم:
تابع f را حول $x = x_0$ در نقطهٔ α بسط تیلور مرتبهٔ ۱ می‌دهیم.

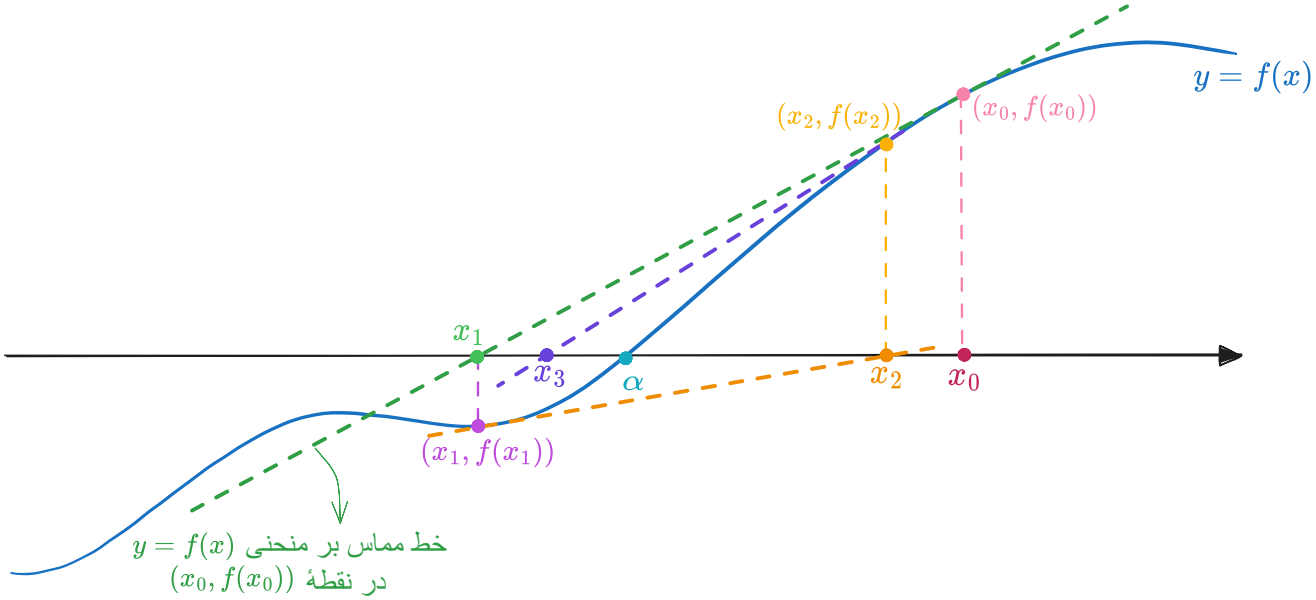
$$f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}(\alpha - x_0)^2}_{\text{error}}$$

که c بین α و x_0 است.

اگر از جملهٔ خطا صرف‌نظر کنیم، به جای α عددی مانند x_1 حاصل می‌شود:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ایدهٔ سوم:



سؤال

تقریبی از $\sqrt{2}$ را با دقت ۸ رقم اعشار و به روش نیوتون-رافسون با انتخاب $x = 1$ به دست آورید.

$$x = \sqrt{2} \implies x^2 - 2 = 0 \implies f(x) = x^2 - 2$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

x_n	n
1	0
1.5	1
1.416666667	2
1.414215686	3
1.414213562	4
1.414213562	5

مثال

تقریبی از $\sqrt[3]{5}$ را با روش نیوتون-رافسون با دقت ۴ رقم اعشار و $x_0 = 1$ بیابید.

$$x = \sqrt[3]{5} \implies x^3 = 5 \implies f(x) = x^3 - 5$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2}$$

x_n	n
1	0
2.33333	1
1.86168	2
1.72200	3
1.71000	4

n	x_n
5	1.70998

نقاط قوت

1. مرتبهٔ همگرایی آن برای ریشه‌های ساده ۲ است (سرعت بالایی دارد).
2. پیچیدگی محاسباتی زیادی ندارد.

نقاط ضعف

قضیه

1. **برای این‌که روش نیوتون به سمت جواب درست حرکت کند، لازم است که در نزدیکی ریشه، حاصل‌ضرب تابع در مشتق دومش، از مربع مشتق اول کوچک‌تر باشد.**
این روش یک روش تکرار ساده است. در روش تکرار ساده، شرط کافی برای همگرایی این است که $|g'(x)| < L \leq 1$. داریم

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

بنابراین

$$|g'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{|f'^2(x)|} < 1 \implies |f(x)f''(x)| < |f'(x)|^2$$

---

2. **اگر α ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه $p \geq 2$.**
روش نیوتون یک روش تکرار ساده با فرض $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ است، بنابراین

$$g'(\alpha) = \frac{|f(\alpha)f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|} = 0$$

---

3. تعریف می‌کنیم $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. در این‌جا $g(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$. در این صورت

$$g'(\alpha) = 1 + \frac{f'^2(\alpha) - f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} = \frac{2f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} = 2 \neq 0$$

بنابراین مرتبهٔ همگرایی آن 1 است.
(❗ به نظرم درست نیست! چون $g'(\alpha) > 1$ پس این روش واگراست.)

1. ممکن است در یک تکرار خاص، $f'(x_n)$ برابر با 0 شود. در این صورت ادامهٔ محاسبات امکان‌پذیر نیست و باید با یک x_0 جدید شروع کرد.
روش رفع این مشکل: از الگوریتم زیر استفاده می‌شود:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$
این روش **وان-میس** نام دارد، اما سرعت نیوتون-رافسون را از دست می‌دهد، زیرا مرتبهٔ همگرایی آن ۱ است.
2. برقراری تضمین همگرایی روش نیوتون کار دشواری‌ست.
3. گاهی دچار حلقه می‌شود و به پاسخ نمی‌رسد.
4. این روش به انتخاب نقطهٔ x_0 بسیار حساس است.
روش رفع این مشکل: از روش‌هایی با حساسیت کمتر استفاده می‌کنیم و نقطهٔ بهینهٔ آن را با دقت کم به دست می‌آوریم و از آن به‌عنوان x_0 روش نیوتن-رافسون استفاده می‌کنیم.

ریشهٔ تکراری

فرض کنیم α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x)=0$ باشد؛ یعنی

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \qquad , \qquad f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

اگر روش نیوتون-رافسون همگرا باشد، آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی آن 1 است.

قضیه

اگر α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x)=0$ بوده و $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ همگرا به α باشد، در این صورت $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^1}=\dfrac{m-1}{m}$.

چون d ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x)=0$ است، تابع h موجود است به‌طوری‌که

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x), \qquad h(\alpha)\neq 0$$

بنابراین طبق $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ داریم

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-\alpha &= x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\\
&= x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)^m h(x_n)}{m(x_n-\alpha)^{m-1}h(x_n)+(x_n-\alpha)^m h'(x_n)}\\
&= x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)} \implies\\
\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} &= 1-\frac{h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}
\end{aligned}$$

حال اگر از طرفین حد بگیریم داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}\right)\\
&= 1-\frac{h(\alpha)}{mh(\alpha)+0}\\
&= 1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}
\end{aligned}$$

روش‌های جایگزین

اگر α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m معادلهٔ $f(x)=0$ باشد، آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی هریک از روش‌های زیر از مرتبهٔ حداقل 2 است.

1. $x_{n+1}=x_n-\dfrac{mf(x_n)}{f'(x_n)}$
2. $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$

نکته: اگر در نظر بگیریم $F(x)=f^{(m-1)}(x)$، آن‌گاه روشن است که α ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $F(x)=0$ است، پس روش نیوتن-رافسون برای تابع F دارای مرتبهٔ همگرایی حداقل 2 است.

سؤال

یک روش تکراری همگرا از مرتبهٔ حداقل 2 برای یافتن ریشهٔ معادلهٔ $x=\sin x$ ارائه دهید.

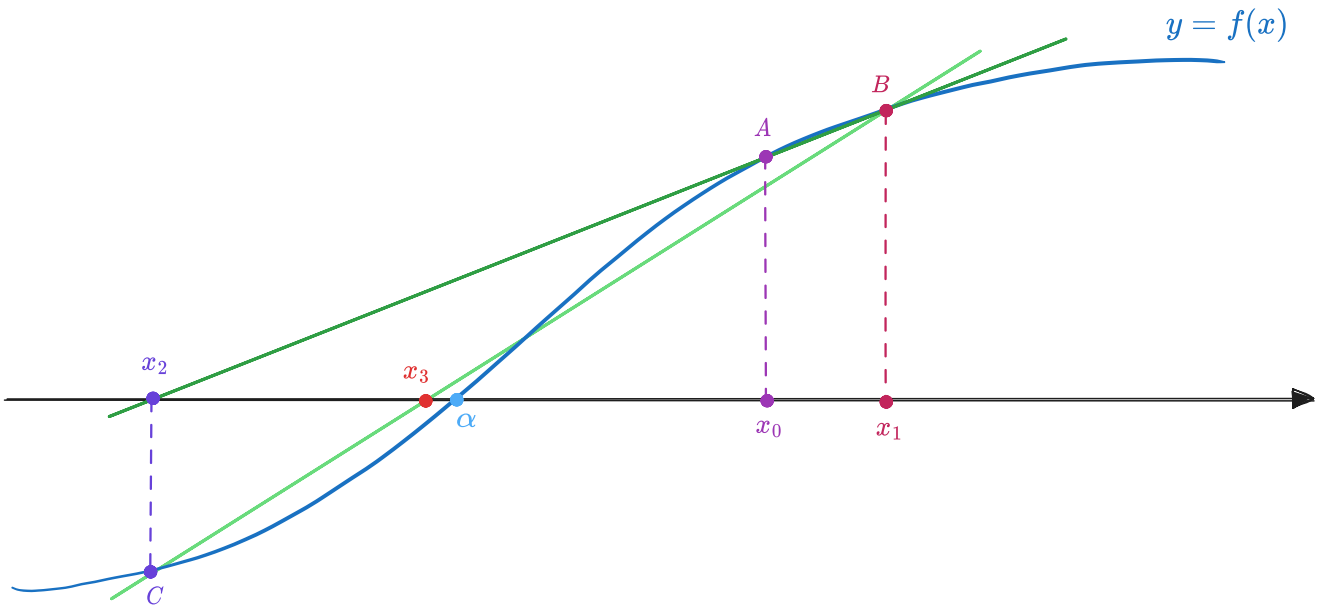
$$\begin{aligned}
&f(x)=x-\sin x \implies f(0)=0\\
&f'(x)=1-\cos x \implies f'(0)=0\\
&f''(x)=\sin x \implies f''(0)=0\\
&f'''(x)=\cos x \implies f'''(0)=1\neq 0 \implies m=3
\end{aligned}$$

بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند به دو صورت زیر باشد:

1. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{3(x_n - \sin x_n)}{1 - \cos x_n}$
2. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sin x_n}{\cos x_n} = x_n - \tan x_n$

۵. روش وتری

یکی از اشکالات روش نیوتن-رافسون آن است که لازم است تابع و مشتق تابع را هم‌زمان به برنامه بدهیم. برای رفع این مشکل از روشی به نام **روش وتری (Secant)** استفاده می‌کنیم. این روش در صورت همگرایی، مرتبهٔ همگرایی کمتری نسبت به روش نیوتن-رافسون دارد.



در تصویر بالا، معادلهٔ خط واصل A و B به‌صورت زیر است:

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

بنابراین x_2 به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \implies x_2 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

مثال

تقریبی از $\sqrt{2}$ را به روش وتری با انتخاب $x_0 = 1$ و $x_1 = 0$ با انجام ۳ تکرار بیابید.

$$\begin{aligned}
x = \sqrt{2} &\implies x_2 - 2 = 0 \\
x_{n+1} &= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{x_{n-1}(x_n^2 - 2) - x_n(x_{n-1}^2 - 2)}{(x_n^2 - 2) - (x_{n-1}^2 - 2)} \\
&= \frac{x_{n-1} x_n + 2}{x_n + x_{n-1}}
\end{aligned}$$

x_{n+1}	x_n	x_{n-1}	n
2	0	1	1
1	0	2	2
1.3333	1	2	3

تقریب به‌دست‌آمده 1.3333 است.

۳. حل دستگاه معادلات غیرخطی (به روش نیوتن)

فرض کنیم $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ است. هدف ما حل مسئلهٔ $f(x) = 0$ است؛ یعنی حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

مثال

در تعداد و محل تقریبی جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$$

مثال

ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 3x + 2y + 1$ را بیابید.

$$\nabla f = 0 \implies \begin{cases} f_x = 0 \implies 2x - 4y + 3 = 0 \\ f_y = 0 \implies -4x + 3y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

به دلیل حجم زیاد محاسبات و مشابه بودن فرایند محاسبه، بحث و مطالعهٔ خود را به حل دستگاه‌های 2×2 محدود می‌کنیم. در این فصل از مطالعه در خصوص تعداد و محل تقریبی جواب‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

مانند روش نیوتن در فضای یک‌بعدی از ایدهٔ خطی‌سازی استفاده می‌کنیم.

$$f(x + k_1, y + k_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y})^{(n)} f(x, y)$$

مشتقات مرتبهٔ n

- $(k_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y})^{(0)} f(x, y) = f(x, y)$
- $(k_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y})^{(1)} f(x, y) = k_1 f_x(x, y) + k_2 f_y(x, y)$
- $(k_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y})^{(2)} f(x, y) = k_1^2 f_{xx}(x, y) + 2k_1 k_2 f_{xy}(x, y) + k_2^2 f_{yy}(x, y)$

در صورت تقریب داریم

$$f(x + k_1, y + k_2) = \underbrace{f(x, y) + k_1 f_x(x, y) + k_2 f_y(x, y)}_{\text{Linearized sentence}} + O(k_1^2 + k_2^2)$$

بنابراین اکنون می‌خواهیم دستگاه زیر را حل کنیم

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

فرض کنیم (α, β) جواب دستگاه معادله باشد، یعنی $\begin{cases} f(\alpha, \beta) = 0 \\ g(\alpha, \beta) = 0 \end{cases}$.

(x_0, y_0) را یک تقریب اولیهٔ (α, β) انتخاب می‌کنیم. سپس یک تقریب خطی f و g را حول نقطهٔ (x_0, y_0) در نقطهٔ (α, β) می‌نویسیم. قرار می‌دهیم $\begin{cases} \alpha = x_0 + h \\ \beta = y_0 + k \end{cases}$. اکنون می‌خواهیم کاری کنیم h و k به صفر میل کنند. داریم:

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + \cdots = 0 \\ g(\alpha, \beta) = g(x_0, y_0) + hg_x(x_0, y_0) + kg_y(x_0, y_0) + \cdots = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) = -f(x_0, y_0) \\ hg_x(x_0, y_0) + kg_y(x_0, y_0) = -g(x_0, y_0) \end{cases}$$

اکنون یک دستگاه دو معادله با دو مجهول h و k داریم. برای به دست آوردن آن‌ها از روش کرامر استفاده می‌کنیم:

$$h = \frac{-\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}, \qquad k = \frac{-\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}$$

ژاکوبین

مخرج این کسرها ژاکوبین نام دارد.

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

بدین ترتیب به دست می‌آید

$$x_1 = x_0 - \frac{\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}, \qquad y_1 = y_0 - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}}$$

در این صورت یک دنبالهٔ بازگشتی $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ حاصل می‌شود که در صورت همگرایی به (α, β) همگراست. می‌توان از این تقریب‌ها در روش نیوتن-رافسون استفاده کرد.

اشکالات

ممکن است ژاکوبین ۰ شود.
هم‌چنین دیگر مشکلات روش نیوتن را نیز داراست.

سؤال

با استفاده از روش نیوتن تقریبی از جواب دستگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

را با انتخاب $X^{(0)} \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$ به‌عنوان نقطهٔ آغازین و انجام دو تکرار بیابید.

$$f = x^2 + y^2 - 25 \Longrightarrow \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases}$$
$$g = x^2 - y^2 - 5 \Longrightarrow \begin{cases} g_x = 2x \\ g_y = -2y \end{cases}$$

مرحلهٔ اول:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} f(X) = 25 + 4 - 25 = 4 \\ g(X) = 25 - 4 - 5 = 16 \\ f_x(X) = 10, f_y(X) = 4 \\ g_x(X) = 10, g_y(X) = -4 \end{cases} \implies J = \begin{matrix} 10 & 4 \\ 10 & -4 \end{matrix} = -80$$

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{-\begin{matrix} 4 & 4 \\ 16 & -4 \end{matrix}}{-80} = -1 \\ k &= \frac{-\begin{matrix} 10 & 4 \\ 10 & 16 \end{matrix}}{-80} = 1.5 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} x_1 = 5 + (-1) = 4 \\ y_1 = 2 + 1.5 = 3.5 \end{cases}$$

<u>مرحلهٔ دوم:</u>

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3.5 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} f(X) = 16 + 3.5^2 - 25 = 3.25 \\ g(X) = 16 - 3.5^2 - 5 = -1.25 \\ f_x(X) = 8, f_y(X) = 7 \\ g_x(X) = 8, g_y(X) = -7 \end{cases} \implies J = \begin{matrix} 8 & 7 \\ 8 & -7 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{-\begin{matrix} 3.25 & 7 \\ -1.25 & -7 \end{matrix}}{-112} = \frac{14}{-112} = -0.125 \\ k &= \frac{-\begin{matrix} 8 & 3.25 \\ 8 & -1.25 \end{matrix}}{-112} = \frac{36}{-112} = -0.3214 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} x_2 = 4 + (-0.125) = 3.875 \\ y_2 = 3.5 + (-0.3214) = 3.1786 \end{cases}$$

سؤال

با انتخاب $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ و انجام دو تکرار، تقریبی از جواب دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{cases} ye^x - x^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} - 3y = -2 \end{cases}$$

$$f = ye^x - x^2 - 1 \implies \begin{cases} f_x = ye^x - 2x \\ f_y = e^x \end{cases}$$

$$g = \sqrt{x^2 + 1} - 3y + 2 \implies \begin{cases} g_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ g_y = -3 \end{cases}$$

<u>مرحلهٔ اول:</u>

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} f(X) = 0.5e - 1 - 1 = -0.6408 \\ g(X) = \sqrt{2} - 1.5 + 2 = 1.9142 \\ f_x(X) = 0.5e - 2 \approx -0.6408, f_y(X) = e \approx 2.7181 \\ g_x(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071, g_y(X) = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.6408h + 2.7181k = 0.6408 \\ 0.7071h - 3k = -1.9142 \end{cases} \implies \begin{cases} h = 7602.92711 \\ k = 1792.64798 \end{cases}$$

۴. حل دستگاه معادلات خطی

- **هدف:** حل عددی دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ که در آن $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $x = (x_i)_{n\times 1}$ و $b = (b_i)_{n\times 1}$.
- **شرط وجود جواب:** $\det(A) \neq 0$.

روش ۱

در این صورت $x = A^{-1}b$ پاسخ معادله است.

مشکل: محاسبهٔ A^{-1} دشوار است، زیرا بعد محاسباتی آن از مرتبهٔ $n!$ است. بنابراین این روش نهایتاً برای ماتریس‌های 4×4 یا کوچک‌تر استفاده می‌شود.

روش ۲: کرامر

فرض کنیم

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

سؤال

دستگاه معادلات زیر را با روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 17 \\ 5x + y + 10z = 37 \\ 6x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 10 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 17 \\ 37 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{matrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 10 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} = 322$$

$$x = \frac{\begin{matrix} 17 & 5 & 1 \\ 37 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & -3 \end{matrix}}{\det(A)} = \frac{322}{322} = 1$$

$$y = \frac{\begin{matrix} 4 & 17 & 1 \\ 5 & 37 & 10 \\ 6 & -1 & -3 \end{matrix}}{\det(A)} = \frac{644}{322} = 2$$

$$z = \frac{\begin{matrix} 4 & 5 & 17 \\ 5 & 1 & 37 \\ 6 & 1 & -1 \end{matrix}}{\det(A)} = \frac{966}{322} = 3$$

روش ۳: حذفی گاوس

در این روش از خواص جبر خطی استفاده می‌شود:

1. جابه‌جایی دو معادله در جواب دستگاه، جواب دستگاه معادلات را تغییر نمی‌دهد.
2. ضرب کردن یک معادله در یک اسکالر، جواب دستگاه معادلات را تغییر نمی‌دهد.
3. جمع کردن مضرب غیرصفر یک معادله با معادلهٔ دیگر، جواب دستگاه معادلات را تغییر نمی‌دهد.

به این سه عمل، **عملیات سطری-مقدماتی** می‌گویند.

مثال

دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x + 2y = 4 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = \frac{4-2}{2} = 1$$
$$z = \frac{2 \times 2 + 1 - 7}{1} = -2$$

ویژگی‌ای که باعث می‌شود مثال بالا به‌راحتی حل شود، داشتن ماتریس ضرایب پایین‌مثلثی است. در چنین شرایطی، روش مورداستفاده را روش جای‌گزینی (جای‌گذاری) پیشرو می‌گویند.
اگر ماتریس ضرایب بالامثلثی باشد نیز به روش مورداستفاده، روش جای‌گزینی (جای‌گذاری) پسرو می‌گویند.

با استفاده از این موضوع، با استفاده از عملیات سطری-مقدماتی، یک دستگاه معادلات خطی را به یک دستگاه معادلات خطی متناظر (هم‌ارز) با آن که ماتریس ضرایب آن مثلثی است، تبدیل می‌کنیم.

با توجه به این‌که محاسبات مربوط به عملیات سطری-مقدماتی هم‌زمان روی ماتریس‌های A و b اتفاق می‌افتد، برای سادگی در محاسبات از ماتریسی به نام ماتریس افزوده (Added/Augmented Matrix) استفاده می‌شود که از الحاق بردار b به ماتریس A به دست می‌آید.

$$A^* = [A|b]$$

سؤال

دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 17 \\ 5x + y + 10z = 37 \\ 6x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 5 & 1 & 10 & 37 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ اول: صفر کردن ستون اول.

$$\begin{aligned} A^* &\equiv \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & -5.25 & 8.75 & 15.75 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & -5.25 & 8.75 & 15.75 \\ 0 & -6.5 & -4.5 & -26.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مرحلهٔ دوم: صفر کردن ستون دوم.

$$A^* \equiv \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & -5.25 & 8.75 & 15.75 \\ 0 & 0 & -15.3333 & -46 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم $-15.3333z = -46$ بنابراین $z = 3$. با جای‌گذاری، داریم $y = 2$ و $x = 1$.

حجم محاسبات لازم برای این روش، $O(\frac{n^3}{3})$ است.

روش گاوس-جردن

در این روش به جای ماتریس مثلثی، ماتریس قطری می‌سازیم.

روش حذفی گاوس در مقایسه با روش گاوس-جردن بهینه‌تر است (حجم محاسباتی کمتری دارد).

اشکال

یکی از بزرگ‌ترین مشکلات روش حذفی گاوس، توسعه و انتشار خطا است؛ یعنی هرگاه مضرب (multiplyer)، اندازهٔ بزرگی داشته باشد، ضرب شدن آن در درایه‌های ماتریس می‌تواند خطای بزرگی را در محاسبات به وجود آورد؛ بنابراین پاسخ دستگاه معادلات را تحت‌تأثیر خود قرار دهد.

برای رفع مشکل بالا از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

1. روش محورگیری جزئی
2. روش محورگیری کامل

روش ۳.۱: روش محورگیری جزئی

در این روش، دو کار اضافی در هر ستون انجام می‌شود:

1. **محورگیری:** شناسایی سطری که قدرمطلق درایهٔ اول آن بزرگ‌ترین باشد.
2. **تعویض پایه:** تعویض جای سطر اول با آن سطر.

با این اوصاف همیشه مضارب دارای قدرمطلق کوچک‌تر از ۱ خواهند بود.

سؤال

دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 17 \\ 5x + y + 10z = 37 \\ 6x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 5 & 1 & 10 & 37 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ اول:

$$\begin{aligned} A^* &\equiv \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & 37 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0.1667 & 12.5 & 37.8333 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0.1667 & 12.5 & 37.8333 \\ 0 & 5.3333 & 3 & 17.6667 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مرحلهٔ دوم:

$$\begin{aligned} A^* &\equiv \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5.3333 & 3 & 17.6667 \\ 0 & 0.1667 & 12.5 & 37.8333 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5.3333 & 3 & 17.6667 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

روش ۳.۲: روش محورگیری کامل

در این روش، در ماتریس ضرایبِ موردمحاسبه، درایه‌ای را پیدا می‌کنیم که قدرمطلق آن بزرگ‌ترین باشد. با تعویض جای سطرها و ستون‌ها، درایهٔ پیداشده را در قطر می‌نشانیم. بدین ترتیب ماتریس مجهول و معلوم نیز باید به‌طور متناظر تغییر کنند. ماتریس مجهول با تغییر ستون‌ها و ماتریس معلوم با تغییر سطرها تغییر خواهد کرد.

سؤال

دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس با محورگیری کامل حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 17 \\ 5x + y + 10z = 37 \\ 6x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 17 \\ 5 & 1 & 10 & 37 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ اول:

$$\begin{aligned} A^* &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 17 \\ 10 & 1 & 5 & 37 \\ -3 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 & 37 \\ 1 & 5 & 4 & 17 \\ -3 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \\ &\equiv [\dots] \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ دوم: در این مرحله تنها در دو سطر و ستون پایانی به دنبال درایهٔ ماکسیمم می‌گردیم.

روش ۴: تجزیهٔ LU

فرض کنیم بتوان ماتریس A را به حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی L و بالامثلثی U تجزیه کرد؛ یعنی

$$A_{n\times n} = L_{n\times n}U_{n\times n}$$

می‌خواهیم دستگاه $Ax = b$ را حل کنیم. قرار می‌دهیم

$$A = LU \implies LUx = b$$

فرض کنیم $Ux = y$. سپس دستگاه $Ly = b$ را به روش جای‌گذاری پیشرو حل کرده و y را می‌یابیم. سپس دستگاه $Ux = y$ را به روش جای‌گذاری پسرو حل کرده و x را می‌یابیم.

برای تجزیهٔ ماتریس A به‌صورت LU حالت‌های مختلفی وجود دارد. برای سادگی در انجام محاسبات، n متغیر آن را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. دو انتخاب مشهور آن به‌صورت زیر است:

1. **روش تجزیهٔ دولیتل (Doolittle):** عناصر قطری ماتریس L را 1 اختیار کنیم.
2. **روش تجزیهٔ کروت (Crout):** عناصر قطری ماتریس U را 1 اختیار کنیم.

سؤال

دستگاه معادلات زیر را به روش تجزیهٔ LU حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 21 \\ 3x_1 + 9x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

در این مثال ۹ معادله و ۱۲ مجهول داریم. از روش تجزیهٔ دولیتل استفاده می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

اکنون ۹ معادله و ۹ مجهول داریم و بدین ترتیب L و U را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 5 \\ u_{13} = 8 \\ l_{21} = 3 \\ \begin{cases} 5l_{21} + u_{22} = 9 \implies u_{22} = -6 \\ 24 + u_{23} = -1 \implies u_{23} = -25 \end{cases} \\ l_{31} = 2 \\ 10 - 6l_{32} = -4 \implies l_{32} = \dfrac{7}{3} \\ 16 - \dfrac{175}{3} + u_{33} = 2 \implies u_{33} = \dfrac{133}{3} \end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & \frac{133}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 21 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالا y را طبق $Ly = b$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 = 21 \\ 3y_1 + y_2 = 7 \implies y_2 = -56 \\ 2y_1 + \dfrac{7}{3}y_2 + y_3 = 0 \implies y_3 = \dfrac{266}{3} \end{cases} \implies y = \begin{bmatrix} 21 \\ -56 \\ \frac{266}{3} \end{bmatrix}$$

اکنون x را مطابق $Ux = y$ حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 21 \implies x_1 = 0 \\ -6x_2 - 25x_3 = -56 \implies x_2 = 1 \\ \frac{133}{3}x_3 = \frac{266}{3} \implies x_3 = 2 \end{cases} \implies x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

سؤال

تجزیهٔ دولیتل ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ u_{13} = 4 \\ l_{21} = 2 \\ 2l_{21} + u_{22} = 4 \implies u_{22} = 0 \\ 4l_{21} + u_{23} = 3 \implies u_{23} = -5 \\ l_{31} = 1 \\ 2l_{31} + 0 \times l_{32} = 0 \implies ※ \end{cases}$$

بنابراین این ماتریس تجزیهٔ LU ندارد.

قضیه

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} A_1 &= [a_{11}] \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A_n &= A \end{aligned}$$

به این ماتریس‌ها، ماتریس‌های پیشروی A گفته می‌شود.
اگر یک ماتریس تجزیهٔ LU داشته باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i، ماتریس A_i نامنفرد است، یعنی دترمینان آن ناصفر است.

۵. تجزیهٔ چاولسکی

ماتریس مربعی A را **مثبت معین (Positive Definite)** می‌نامیم هرگاه

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad x^{\mathbf{T}} A x > 0$$

ماتریس مثبت معین متقارن خواص مختلفی دارد:

1. مقادیر ویژهٔ مثبت دارد.
2. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس روی قطر قرار دارد.
3. معکوس‌پذیر است.

اگر A ماتریس مثبت معین باشد، آن‌گاه ماتریس پایین‌مثلثی L موجود است به‌طوری‌که

$$A = LL^{\mathbf{T}}$$

به چنین تجزیه‌ای، تجزیهٔ چاولسکی گفته می‌شود.

۵. درون‌یابی

در علوم تجربی با پدیده‌هایی مواجه هستیم که اندازه‌گیری آن‌ها به‌صورت تابعی از یک یا چند متغیر مستقل امکان‌پذیر نیست و نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت $y = f(x)$ نمایش داد. در عوض، با مجموعه‌ای از داده‌ها به‌صورت زیر مواجه هستیم:

$$\{(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)\} = \{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$$

یا به‌صورت

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline f & f_0 & f_1 & \dots & f_n \end{array}$$

به چنین جدولی، **تابع جدولی** گفته می‌شود.

تابع $p(x)$ را **تابع درون‌یاب** تابع جدولی فوق می‌نامیم هرگاه $P(x_i) = f_i; \qquad i = 0, \dots, n$.
عملی که $P(x)$ را تعیین می‌کند، **درون‌یابی** نامیده می‌شود.

هدف: تخمین (تقریب) تابع f در نقاطی که در تابع جدولی داده نشده‌است.

۱. روش واندرموند

اگر تابع $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه $P(x)$ را چندجمله‌ای درون‌یاب (Polynomial Interpolator) می‌نامیم.

قضیه

برای $n+1$ نقطهٔ متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ فقط و فقط یک چندجمله‌ای مانند p از درجهٔ حداکثر n موجود است به‌طوری‌که $P(x_i) = f_i; \quad i = 0, \dots, n$.

قرار می‌دهیم $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$. اگر P چندجمله‌ای درون‌یاب باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(x_0) = f_0 &\implies a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ P(x_1) = f_1 &\implies a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ &\vdots \\ P(x_n) = f_n &\implies a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermonde Matrix}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

می‌دانیم دترمینان ماتریس واندرموند برابر است با

$$\prod_{\substack{i,j \neq 0 \\ i<j}} (x_i - x_j)$$

از آن‌جا که $x_0, x_1, \dots x_n$ متمایزند، بنابراین این دترمینان مخالف ۰ است.

فرض کنیم P_1 و P_2 دو چندجمله‌ای با حداکثر درجهٔ n باشند که تابع f را در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ درون‌یابی می‌کنند.
قرار می‌دهیم $h(x) = P_1(x) - P_2(x)$. به‌وضوح h یک چندجمله‌ای با حداکثر درجهٔ n است. داریم
$h(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = f_i - f_i = 0; \quad i = 0, \dots, n$
از آن‌جا که درجهٔ h حداکثر n و تعداد ریشه‌ها $n+1$ است، به‌ناچار
$h(x) \equiv 0 \qquad \forall x$

یعنی

$$P_1(x) = P_2(x)$$

سؤال

چندجمله‌ای درون‌یاب جدولی زیر را بیابید و در $x = 1.5$ مقدار تابع را تقریب بزنید.

x	0	1	2
f	1	2	5

$$\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \\
&P(0) = 1 \implies a_0 = 1 \\
&\left.\begin{aligned}
&P(1) = 2 \implies a_0 + a_1 + a_2 = 2 \implies a_1 + a_2 = 1 \\
&P(2) = 5 \implies a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 5 \implies a_1 + 2a_2 = 2
\end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم $P(x) = x^2 + 1$.

۲. روش لاگرانژ

تعریف می‌کنیم

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n است و آن را چندجمله‌ای لاگرانژ می‌نامند. این چندجمله‌ای خاصیت زیر را دارد:

$$\left.\begin{aligned} L_i(x_k) &= 0 \quad k \neq i \\ L_i(x_i) &= 1 \quad k = i \end{aligned}\right\} \implies L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

قضیه

تابع $P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \ldots + f_n L_n(x)$ تابع f را در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ درون‌یابی می‌کند.

$$\begin{aligned}
P(x_i) = {} & \cancelto{0}{L_0(x_i)} f_0 + \cancelto{0}{L_1(x_i)} f_1 + \\
& \ldots + \cancelto{0}{L_{i-1}(x_i)} f_{i-1} + \cancelto{1}{L_i(x_i)} f_i + \cancelto{0}{L_{i+1}(x_i)} f_{i+1} + \\
& \ldots + \cancelto{0}{L_n(x_i)} f_n = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

سؤال

چندجمله‌ای درون‌یاب جدولی زیر را بیابید.

x	0	1	2
f	1	2	5

$$L_0(x) = \frac{\cancel{(x-0)}\,(x-1)(x-2)}{\cancel{(0-0)}\,(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\,\cancel{(x-1)}\,(x-2)}{(1-0)\,\cancel{(1-1)}\,(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)\,\cancel{(x-2)}}{(2-0)(2-1)\,\cancel{(2-2)}} = \frac{x(x-1)}{2}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= 1L_0(x) + 2L_1(x) + 5L_2(x) \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 2\frac{x(x-2)}{-1} + 5\frac{x(x-1)}{2} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

قضیه

برای هر تابع جدولی با $n+1$ نقطهٔ متمایز به‌صورت $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ داریم

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

می‌دانیم $P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$. تابع جدولی زیر را در نظر می‌گیریم

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	1	1	$\cdots$	1

از آن‌جا که L_iها مستقل از مقدار تابع هستند، برای این تابع جدولی داریم

$$P(x) = 1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cancel{f_i}^{\,1}$$

ویژگی‌ها

نقاط قوت

1. برای یافتن چندجمله‌ای درون‌یاب نیازی به حل دستگاه معادله نیست.
2. چندجمله‌ای لاگرانژ مستقل از تابع جدولی است و فقط به طول نقاط داده‌شده وابسته است.

نقاط ضعف

1. چندجمله‌ای درون‌یاب به‌یک‌باره محاسبه می‌شود.
2. رشد و انتشار خطا در این توابع زیاد است و برای درجات بالا، حجم محاسبات زیادی دارد.

از روش درون‌یابی لاگرانژ غالباً هنگامی استفاده می‌کنیم که تعداد نقاط جدولی کم باشد.

سؤال

چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را بیابید.

x	1	2	4
f	7	0	-1

1. **مقدار تابع را در $x = 2.2$ تقریب بزنید.**
2. **مختصات نقطهٔ $(2.5, 3)$ را به تابع جدولی بیفزایید و تقریب جدید تابع را در $x = 2.2$ بیابید.**
3. **از تابع جدولی اصلی، مختصات $(2, 0)$ را حذف کنید و تقریب جدید تابع را در $x = 2.2$ به دست آورید.**

---

1. $$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^2-6x+8)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{2}(x^2-5x+4)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$P_1(x) = 7 \times \frac{1}{3}(x^2-6x+8) + 0 - \frac{1}{6}(x^2-3x+2) = \frac{1}{6}(13x^2-87x+110)$$
$$P_1(2.2) = \frac{1}{6}(13(2.2)^2 - 87(2.2) + 110) = -3.08$$

---

2. $$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)(x-4)}{(1-2)(1-2.5)(1-4)} = -\frac{1}{9}(2x^3-17x^2+46x-40)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2.5)(x-4)}{(2-1)(2-2.5)(2-4)} = x^3-7.5x^2+16.5x-10$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(2.5-1)(2.5-2)(2.5-4)} = -\frac{1}{9}(8x^3-56x^2+112x-64)$$
$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-2.5)}{(4-1)(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{18}(2x^3-11x^2+19x-10)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= -7 \times \frac{1}{9}(2x^3-17x^2+46x-40) + 0 + 3 \times (x^3-7.5x^2+16.5x-10) \\ &\quad - \frac{1}{18}(2x^3-11x^2+19x-10) \\ &= \frac{1}{3}(4x^3-26x^2+38x+5) \end{aligned}$$
$$P_2(2.2) = \frac{1}{3}(4(2.2)^3 - 26(2.2)^2 + 38(2.2) + 5) = 1.784$$

---

3. $$L_0(x) = \frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{3}(4-x)$$
$$L_1(x) = \frac{x-1}{4-1} = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$P_3(x) = 7 \times \frac{1}{3}(4-x) - \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{3}(29-8x)$$
$$P_3(2.2) = \frac{1}{3}(29 - 8(2.2)) = 3.8$$

۳. روش نویل

فرض کنیم $P_{i(i+1)\cdots(i+k)}(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_j, f_j) \mid j = i, \ldots, i+k\}$ باشد و $P_{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)(i+k+1)}(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_j, f_j) \mid j = i+1, \ldots, i+k, i+k+1\}$ باشد. در این صورت داریم

$$P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} P_{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)(i+k+1)}(x) + \frac{x - x_{i+k+1}}{x_i - x_{i+k+1}} P_{i(i+1)\cdots(i+k)}(x)$$

سؤال

به روش الگوریتم نویل، تقریب تابع f را در $x = 3$ برای تابع جدولی زیر بیابید.

x	1	2	4	5
f	0	3	3	6

---

x	$f = P_i$			
1	$P_0 = 0$			
		$P_{01} = \frac{\cancel{x}^3 - 1}{2-1}\cancel{P_1}^3 + \frac{\cancel{x}^3 - 2}{1-2}\cancel{P_0}^0 = 6$		
2	$P_1 = 3$		$P_{012} = \frac{\cancel{x}^3 - 1}{4-1}\cancel{P_{12}}^3 + \frac{\cancel{x}^3 - 4}{1-4}\cancel{P_{01}}^6 = 4$	
		$P_{12} = \frac{\cancel{x}^3 - 2}{4-2}\cancel{P_2}^3 + \frac{\cancel{x}^3 - 4}{2-4}\cancel{P_1}^3 = 3$		$P_{0123} = \frac{\cancel{x}^3 - 1}{5-1}\cancel{P_{123}}^2 + \frac{\cancel{x}^3 - 5}{1-5}\cancel{P_{012}}^4 = 3$
4	$P_2 = 3$		$P_{123} = \frac{\cancel{x}^3 - 2}{5-2}\cancel{P_{23}}^0 + \frac{\cancel{x}^3 - 5}{2-5}\cancel{P_{12}}^3 = 2$	
		$P_{23} = \frac{\cancel{x}^3 - 4}{5-4}\cancel{P_3}^6 + \frac{\cancel{x}^3 - 5}{4-5}\cancel{P_2}^3 = 0$		
5	$P_3 = 6$			

قضیه

تابع $P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x)$، تابع جدولی $\{(x_j, f_j) \mid j = i, \ldots, i+k+1\}$ را درون‌یابی می‌کند.

اولاً $P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $k+1$ است.

ثانیاً نشان می‌دهیم $P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x_j) = f_j$ به‌ازای هر $j = i, i+1, \ldots, i+k+1$. سه حالت وجود دارد:

1. **حالت** $j = i$:

$$P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x_i) = 0 \times f_{i+k+1} + 1 \times f_i = f_i$$

2. **حالت** $j = i+k+1$:

$$P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x_{i+k+1}) = 1 \times f_{i+k+1} + 0 \times f_i = f_{i+k+1}$$

3. **حالت** $j = i+1, \ldots, i+k$:

$$\begin{aligned} P_{i(i+1)\cdots(i+k+1)}(x_j) &= \frac{x_j - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} f_j + \frac{x_j - x_i}{x_i - x_{i+k+1}} f_j \\ &= f_j \underbrace{\left(\frac{x_j - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} + \frac{x_j - x_i}{x_i - x_{i+k+1}} \right)}_{=1} \\ &= f_j \end{aligned}$$

۴. روش تفاضلات تقسیم‌شدهٔ نیوتن

هدف: یافتن یک چندجمله‌ای درونیاب برای تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ که از $n+1$ نقطه متمایز تشکیل شده‌است. ما به دنبال چندجمله‌ای $P(x)$ هستیم که از تمام این نقاط عبور کند (یعنی $P(x_i) = f_i$).

1. **محاسبهٔ a_0 (تقریب مرتبهٔ صفر):** ابتدا فرض می‌کنیم چندجمله‌ای ثابت است:

$$P_0(x) = a_0$$

با جایگذاری اولین نقطه (x_0, f_0):

$$P(x_0) = f_0 \implies a_0 = f_0$$

2. **محاسبهٔ a_1 (تقریب مرتبهٔ اول):** چندجمله‌ای مرتبهٔ یک $P_1(x)$ بر اساس $P_0(x)$ ساخته می‌شود:

$$P_1(x) = P_0(x) + a_1(x - x_0)$$

با جایگذاری نقطهٔ دوم (x_1, f_1):

$$P_1(x_1) = f_1 \implies f_1 = f_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

بنابراین ضریب a_1 برابر است با شیب خط بین دو نقطه:

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

3. **محاسبهٔ a_2 (تقریب مرتبهٔ دوم):** چندجمله‌ای مرتبهٔ دوم $P_2(x)$ با افزودن یک جملهٔ جدید به $P_1(x)$ ساخته می‌شود:

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

برای یافتن a_2، نقطهٔ سوم (x_2, f_2) را در معادله قرار می‌دهیم (با توجه به این‌که $P_2(x_2) = f_2$):

$$f_2 = P_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

با مرتب‌سازی معادله برای یافتن a_2، فرمول زیر به دست می‌آید:

$$a_2 = \frac{f_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

بنابراین هر چندجمله‌ای مرتبهٔ k را می‌توان بر اساس چندجمله‌ای مرتبهٔ قبل نوشت:

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + a_k \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

پس

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ضرایب ثابت مجهول هستند.

تفاضلات تقسیم‌شده

تفاضل مرتبهٔ صفر نیوتن برای نقطهٔ x_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i] = f_i$$

تفاضل مرتبهٔ اول نیوتن برای دو نقطهٔ x_i و x_{i+1} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

تفاضل مرتبهٔ دوم نیوتن برای سه نقطهٔ x_i و x_{i+1} و x_{i+2} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

تفاضل مرتبهٔ k نیوتن برای $k+1$ نقطهٔ $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

سؤال

جدول تفاضلات تقسیم‌شدهٔ نیوتن را برای تابع جدولی زیر بیابید.

x	1	2	4	6
f	3	5	7	3

x	f	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
1	$3 = f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{\cancel{f[x_1]}^{5} - \cancel{f[x_0]}^{3}}{2-1} = 2$		
2	$5 = f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\cancel{f[x_1, x_2]}^{1} - \cancel{f[x_0, x_1]}^{2}}{4-1} = -0.3333$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{\cancel{f[x_2]}^{7} - \cancel{f[x_1]}^{5}}{4-2} = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\cancel{f[x_1, x_2, x_3]}^{-0.75} - \cancel{f[x_0, x_1, x_2]}^{-0.333}}{6-1}$
4	$7 = f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\cancel{f[x_2, x_3]}^{-2} - \cancel{f[x_1, x_2]}^{1}}{6-2} = -0.75$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{\cancel{f[x_3]}^{3} - \cancel{f[x_2]}^{7}}{6-4} = -2$		
6	$3 = f[x_3]$			

$$p(x) = 3 + 2(x-1) - 0.3333(x-1)(x-2) - 0.8333(x-1)(x-2)(x-4)$$

لم

اگر $\{0, 1, \ldots, k\} = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$، آن‌گاه

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$$

یعنی جایگشت x_iها تأثیری روی تفاضلات تقسیم‌شدهٔ آن‌ها ندارد.

قضیه

چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ که متشکل از $n+1$ نقطهٔ متمایز است، به‌صورت زیر است:

$$P(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

پایهٔ استقرا: فرض کنیم $n = 1$ (یعنی دو نقطهٔ متمایز x_0 و x_1 داشته باشیم). در این صورت ادعا می‌کنیم چندجمله‌ای به‌صورت زیر است:

$$P(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

مقادیر تابع را در نقاط x_0 و x_1 بررسی می‌کنیم:

- $x = x_0 : P(x_0) = f_0 + f[x_0, x_1](0) = f_0$
- $x = x_1 : P(x_1) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = f_0 + (f_1 - f_0) = f_1$

بنابراین پایهٔ استقرا برقرار است.

فرض استقرا: فرض کنیم چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{k-1}$ برای k نقطهٔ متمایز به‌صورت زیر باشد:

$$P_{0\ldots k-1}(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_{k-1}](x - x_0)\cdots(x - x_{k-2})$$

همچنین فرض کنیم این حکم برای مجموعهٔ نقاط $x_1, \ldots, x_k$ نیز برقرار باشد:

$$P_{1\ldots k}(x) = f_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) + \cdots + f[x_1, \ldots, x_k](x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

حکم استقرا: بنابر فرض استقرا، می‌دانیم که ضریب جملهٔ با بالاترین توان (یعنی x^{k-1}) در این دو چندجمله‌ای به ترتیب برابر است با تفاضل‌های تقسیم شدهٔ $f[x_0, \ldots, x_{k-1}]$ و $f[x_1, \ldots, x_k]$.

می‌خواهیم فرمول را برای $k+1$ نقطه (از x_0 تا x_k) اثبات کنیم. طبق روش نویل، چندجمله‌ای $P_{0\ldots k}(x)$ را می‌توان بر حسب دو چندجمله‌ای قبلی نوشت:

$$P_{0\ldots k}(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}P_{0\ldots k-1}(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}P_{1\ldots k}(x)$$

باید ضریب x^k را در این چندجمله‌ای جدید بیابیم. با توجه به فرمول بالا، ضریب x^k از ضرب x در جملات با توان x^{k-1} چندجمله‌ای‌های صورت کسر حاصل می‌شود؛ بنابراین ضریب x^k برابر است با

$$\frac{1}{x_0 - x_k} f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] + \frac{1}{x_k - x_0} f[x_1, x_2, \ldots, x_k] = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

که دقیقاً تعریف تفاضل تقسیم‌شدهٔ مرتبهٔ k است. بنابراین، ضریب جملهٔ $(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$ در چندجمله‌ای نهایی برابر با $f[x_0, \ldots, x_k]$ خواهد بود و اثبات کامل می‌شود.

سؤال

فرض کنید $f(x) = x^n$. آن‌گاه ثابت کنید

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{cases} 0 & k > n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

حالت $k = n$:

فرض کنیم $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ای از $n + 1$ نقطهٔ متمایز باشند. چندجمله‌ای درون‌یاب $P_n(x)$ که از این نقاط می‌گذرد، یکتاست. چون $f(x) = x^n$ خود یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است، پس چندجمله‌ای درون‌یاب برابر با خود تابع است: $P_n(x) = x^n$. از طرفی، چندجمله‌ای درون‌یاب عبارت است از:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \boldsymbol{f[x_0, \ldots, x_n]}(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

در این فرم، ضریب بزرگ‌ترین توان x (یعنی x^n) برابر است با $f[x_0, \ldots, x_n]$.
از آن‌جا که $P_n(x) = x^n$، ضریب x^n در آن برابر 1 است. بنابراین:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = 1$$

حالت $k > n$:

فرض کنیم $k > n$ و ما $k + 1$ نقطهٔ متمایز $\{x_0, \ldots, x_k\}$ داریم. چندجمله‌ای درون‌یاب $P_k(x)$ برای این نقاط، باز هم به دلیل یکتایی و این‌که درجهٔ $f(x)$ کمتر از k است، برابر با خود $f(x)$ خواهد بود: $P_k(x) = x^n$. اگر فرم نیوتنی را برای $P_k(x)$ بنویسیم، آخرین جملهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{f[x_0, \ldots, x_k]}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

این جمله شامل توان x^k است. اما می‌دانیم که چندجمله‌ای اصلی ما x^n است و چون $k > n$، ضریب توان x^k در آن باید **صفر** باشد. بنابراین:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = 0$$

مثال

$f(x) = x^3$

x	0	-1	3	6
f	0	-1	27	216

---

x	f	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
-1	-1			
		$\frac{0+1}{0+1} = 1$		
0	0		$\frac{9-1}{3-1} = 2$	
		$\frac{27-0}{3-0} = 9$		$\frac{9-2}{6+1} = \boxed{1}$
3	27		$\frac{63-9}{6-0} = 9$	
		$\frac{216-27}{6-3} = 63$		
6	216			

مثال

فرض کنید تابع به‌صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

می‌خواهیم حاصل عبارت زیر را بیابیم (با شرط $x_i \neq 0$):

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

مرحلهٔ ۱: محاسبه برای دو نقطه $(k = 1)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x_1}{x_0 x_1}}{x_1 - x_0} = (-1)\frac{1}{x_0 x_1}$$

مرحلهٔ ۲: محاسبه برای سه نقطه $(k = 2)$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\left(-\frac{1}{x_1 x_2}\right) - \left(-\frac{1}{x_0 x_1}\right)}{x_2 - x_0}$$
$$= \frac{\frac{-x_0 + x_2}{x_0 x_1 x_2}}{x_2 - x_0} = (-1)^2 \frac{1}{x_0 x_1 x_2}$$

نتیجه‌گیری کلی (فرمول عمومی):
با توجه به روند بالا، برای n نقطه داریم:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \ldots x_n}$$

سؤال

چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_i = 1 + 0.5i, f_i = x_i^{x_i})\}_{i=0}^{3}$ را به روش تفاضلات تقسیم‌شدهٔ نیوتن به دست آورید. سپس مقدار تقریبی $1.7^{1.7}$ را بیابید و خطای آن را حساب کنید. اگر مختصات نقطهٔ $(1.2, 2)$ را به تابع جدولی اضافه کنید، تابع درون‌یاب چه تغییری می‌کند؟

---

x	f	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
1	1			
		$\frac{1.8371 - 1}{1.5 - 1} = 1.6742$		
1.5	1.8371		$\frac{4.3258 - 1.6742}{2 - 1} = 2.6516$	
		$\frac{4 - 1.8371}{2 - 1.5} = 4.3258$		$\frac{7.4384 - 2.6516}{2.5 - 1} = 3.1912$
2	4		$\frac{11.7642 - 4.3258}{2.5 - 1.5} = 7.4384$	
		$\frac{9.8821 - 4}{2.5 - 2} = 11.7642$		
2.5	9.8821			

$$P(x) = 1 + 1.6742(x - 1) + 2.6516(x - 1)(x - 1.5) + 3.1912(x - 1)(x - 1.5)(x - 2) \implies$$
$$P(1.7) = 1 + 1.6742(0.7) + 2.6516(0.7)(0.2) + 3.1912(0.7)(0.2)(-0.3) = \boxed{2.4091}$$

$$e = \frac{2.4647 - 2.4091}{2.4647} \times 100 = \%2.2558$$

حال اگر نقطهٔ $(1.2, 2)$ را اضافه کنیم:

$$P_1(x) = P(x) + a(x - 1)(x - 1.5)(x - 2)(x - 2.5) \implies$$

$$
\begin{aligned}
P_1(1.2) = P(1.2) + a(0.2)(-0.3)(-0.8)(-1.3) \implies \\
2 = 1.3289 - 0.0624a \implies \\
a = \frac{2 - 1.3289}{-0.0624} \approx -10.7548
\end{aligned}
$$

نقاط متساوی‌الفاصله

اپراتور E را **اپراتور انتقال (Shifting Operator)** می‌نامیم هرگاه

$$Ef_i = f_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

مثال

x	-1	4	3	6	7
f	2	8	5	1	0

$Ef_1 = 5$
$Ef_2 = 1$

نکته

$$E^2 f_i = E(Ef_i) = Ef_{i+1} = f_{i+2}$$

$$E^{-1} f_i = f_{i-1}$$

تعمیم

$$E^k f_i = f_{i+k}$$

$$E^{-k} f_i = f_{i-k}$$

مثال

در مثال قبل داریم

$E^2 f_1 = f_3 = 1$

فرض کنیم $x_i = x_0 + ih$ که در آن h عددی ثابت است که **طول گام (Step Size)** نامیده می‌شود و $\{(x_i = x + ih, f_i)\}_{i=0}^{n}$ یک تابع جدولی شامل $n+1$ نقطهٔ متساوی‌الفاصله باشد.

$$E^\alpha f_i = f(x_i + \alpha h) = f_{i+\alpha}$$

مثال

x	-1	-0.5	0	0.5	1
f	7	10	12	-3	6

$$E^{\frac{1}{2}} f_1 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h\right) = f\left(-0.5 + \frac{1}{2} \times 0.5\right) = f(-0.25)$$

عملگر $\Delta = E - 1$ را **اپراتور تفاضل متناهی پیشرو (Forward Finite Difference Operator یا FFD)** می‌نامیم.

$$\Delta f_i = (E - 1) f_i = f_{i+1} - f_i$$

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i)\\ &= \Delta(f_{i+1} - f_i)\\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i\\ &= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i-1} - f_i)\\ &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\end{aligned}$$

$$\Delta = E - 1 \implies \Delta^2 = (E-1)^2 = E^2 - 2E + 1$$

$$\begin{aligned}\Delta^k f_i &= (E-1)^k f_i\\ &= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^{k-n} E^n f_i\\ &= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^{k-n} f_{i+n}\end{aligned}$$

عملگر $\nabla = 1 - E^{-1}$ را **اپراتور تفاضل متناهی پسرو (Backward Finite Difference Operator یا BFD)** می‌نامیم.

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} = \Delta f_{i-1}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\\ &= \Delta^2 f_{i-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^k f_i &= \Delta^k f_{i-k}\\ &= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^{k-n} f_{i-n}\end{aligned}$$

عملگر $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{\frac{-1}{2}}$ را اپراتور تفاضل متناهی مرکزی می‌نامیم.

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

قضیه (ارتباط تفاضلات متناهی با تفاضلات تقسیم‌شده)

اگر $x_i = x_0 + ih$ **برای هر** $i = 1, 2, \ldots, n$ **آن‌گاه**

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{\nabla f_{i+1}}{h}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_{i_0}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{\nabla f_{i+1}}{h}$$

تعمیم:

$$\begin{aligned}f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}\\ &= \frac{\frac{\Delta f_{i+1}}{h} - \frac{\Delta f_i}{h}}{2h}\\ &= \frac{\Delta(f_{i+1} - f_i)}{2h^2}\\ &= \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}\end{aligned}$$

تعمیم:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k!h^k} = \frac{\nabla^k f_{i+k}}{k!h^k}$$

اثبات با استقرا.

سؤال

جدول تفاضلات متناهی پیشرو (پسرو) تابع جدولی زیر را بیابید.

x	7	8	9	10	11
f	4	7	3	-1	0

---

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
7	4				
		$\underbrace{7-4=3}_{\Delta f_0=\nabla f_1}$			
8	7		$\underbrace{-4-3=-7}_{\Delta^2 f_0=\nabla^2 f_2}$		
		$\underbrace{3-7=-4}_{\Delta f_1=\nabla f_2}$		$\underbrace{0-(-7)=7}_{\Delta^3 f_0=\nabla^3 f_3}$	
9	3		$\underbrace{-4-(-4)=0}_{\Delta^2 f_1=\nabla^2 f_3}$		$\underbrace{5-7=-2}_{\Delta^4 f_0=\nabla^4 f_4}$
		$\underbrace{-1-3=-4}_{\Delta f_2=\nabla f_3}$		$\underbrace{5-0=5}_{\Delta^3 f_1=\nabla^3 f_4}$	
10	-1		$\underbrace{1-(-4)=5}_{\Delta^2 f_2=\nabla^2 f_4}$		
		$\underbrace{0-(-1)=1}_{\Delta f_3=\nabla f_4}$			
11	0				

درون‌یابی نیوتن-گرگوری

لم

فرض کنیم $x_i = x_0 + ih$ برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$. در این صورت

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k) = h^{k+1}(\theta)(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-k)$$

که در آن $x = x_0 + \theta h$.

$$\begin{aligned}
&x - x_0 = (x_0 + \theta h) - (x_0) = \theta h \\
&x - x_1 = (x_0 + \theta h) - (x_0 + h) = (\theta - 1)h \\
&\vdots \\
&x - x_k = (x_0 + \theta h) - (x_0 + kh) = (\theta - k)h
\end{aligned}$$

بنابراین

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k) = h^{k+1}(\theta)(\theta-1)\cdots(\theta-k)$$

قضیه (درون‌یابی پیشرو)

فرض کنیم $x_i = x_0 + ih$ برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ و $x = x_0 + \theta h$ که در آن $0 \le \theta \le k$. در این صورت، چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ در نقطهٔ x برابر است با

$$P(\theta) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}\theta + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}\theta(\theta-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)$$

با استفاده از روش درون‌یابی نیوتن داریم

$$\begin{aligned}
P(x) = f_0 &+ f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\
&\ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

طبق قضیه و لم قبل داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!h}h\theta + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}h^2\theta(\theta-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}h^n\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1) \\ &= \binom{\theta}{0}f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\theta}{k}\Delta^k f_0 \end{aligned}$$

قضیه (درون‌یابی پسرو)

فرض کنید $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ یک تابع جدولی باشد و $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. همچنین فرض کنید $x = x_n + sh$ عددی بین x_0 و x_n باشد. در این صورت:

$$P(s) = f_n + \nabla f_n s + \frac{\nabla^2 f_n}{2!}s(s+1) + \cdots + \frac{\nabla^n f_n}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

با روش مشابه درون‌یابی پیشرو و معکوس کردن ترتیب نقاط از انتها به ابتدا، فرمول فوق حاصل می‌شود.

نکته

برای درون‌یابیِ تابع جدولی با نقاط مساوی‌الفاصله از روش تفاضل متناهی پیشرو و تفاضل متناهی پسرو استفاده می‌شود.

- اگر x به **ابتدای جدول** نزدیک‌تر باشد، از روش تفاضلات متناهی **پیشرو** استفاده می‌کنیم.
- اگر x به **انتهای جدول** نزدیک‌تر باشد، از روش تفاضلات متناهی **پسرو** استفاده می‌کنیم.

سؤال

به روش درون‌یابی مناسب تقریبی از مقدار $\sin 136^\circ$ و $\sin 3^\circ$ را با استفاده از تابع جدولی $\{(\frac{n\pi}{5}, \sin\frac{n\pi}{5})\}_{n=0}^{5}$ محاسبه کنید.

---

x_i	f_i	Δ/∇	Δ^2/∇^2	Δ^3/∇^3	Δ^4/∇^4	Δ^5/∇^5
0	0					
		0.5877				
$\frac{\pi}{5} \approx 0.6283$	0.5877		-0.2245			
		0.3632		-0.1387		
$\frac{2\pi}{5} \approx 1.2566$	0.9510		-0.3632		0.1387	
		0		0		0
$\frac{3\pi}{5} \approx 1.8849$	0.9510		-0.3632		0.1387	
		-0.3632		0.1387		
$\frac{4\pi}{5} \approx 2.5132$	0.5878		-0.2245			
		-0.5878				
$\pi \approx 3.1416$	0					

برای $\sin 3^\circ$:

$$\theta = 3^\circ = \frac{\pi}{60} \approx 0.05236$$

به ابتدای جدول نزدیک‌تر است، بنابراین بهترین روش برای درون‌یابی با تفاضلات متناهی پیشرو است.

$$0.05236 = x_0 + \theta h \implies \frac{\pi}{60} = 0.05236 = 0 + \theta \times \frac{\pi}{5} \implies \theta = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

$$\sin 3^\circ \approx 0 + \frac{0.5877}{1!} \times 0.0833 + \frac{-0.2245}{2!} \times 0.0833(0.0833-1) + \frac{-0.1387}{3!}(0.0833)(0.0833-1)(0.0833-2) + \frac{0.1387}{4!}(0.0833)(0.0833-1)(0.0833-2)(0.0833-3)$$

برای $x = 136^\circ$:

$$x = 136^\circ \approx \frac{136\pi}{180}$$

به انتهای جدول نزدیک‌تر است، بنابراین بهترین روش برای درون‌یابی با تفاضلات متناهی پسرو است.

$$x = x_n + sh \implies \frac{136}{180}\pi = \pi + s\frac{\pi}{5}$$

$$s = \frac{\frac{136}{180} - 1}{\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{44}{180}}{\frac{1}{5}} = -1.2222$$

$$\sin(136^\circ) \approx 0 + \frac{-0.5878}{1!}(-1.2222) + \frac{-0.2245}{2!}(-1.2222)(-1.2222+1) + \frac{0.1387}{3!}(-1.2222)(-1.2222+1)(-1.2222+2) + \frac{-0.1387}{4!}(-1.2222)(-1.2222+1)(-1.2222+2)(-1.2222+3)$$

قضیه (خطای روش درون‌یابی)

فرض کنیم $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، $n+1$ نقطهٔ متمایز و f تابعی تعریف‌شده بر $[a,b]$، پیوسته و با مشتقات جزئی از مرتبهٔ $n+1$ باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ تابع جدولی و $P_n(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب آن باشد. در این صورت عدد c در $[a,b]$ وجود دارد به قسمی که:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

نکته

خطای درون‌یابی به سه فاکتور زیر بستگی دارد:

1. $\Pi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$
2. $\frac{1}{(n+1)!}$
3. $f^{(n+1)}(x)$

می‌توان برای کاهش خطای درون‌یابی x_iها را چنان انتخاب کرد که $\frac{\Pi_n(x)}{(n+1)!}$ به حداقل مقدار برسد.
اما در این صورت ممکن است $|f^{(n+1)}|$ در $[a,b]$ عدد بسیار بزرگی باشد؛ به قسمی که بزرگی آن کوچکی $\frac{\Pi_n(x)}{(n+1)!}$ را تحت شعاع قرار دهد. به چنین پدیده‌ای **رونگه** گفته می‌شود.
در این صورت درون‌یابی با تعداد نقاط کمتر، بهتر و نقاط مناسب‌تر، خطای درون‌یابی را نسبت به افزایش n کاهش می‌دهد.

نقطهٔ $a < x < b$ را در نظر می‌گیریم. تابعی کمکی $q(t)$ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(t) = P(t) + \lambda(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)$$

و عدد λ را چنان انتخاب می‌کنیم که $q(x) = f(x)$. به‌وضوح $q[t] = 0$ در $[a,b]$ دارای $n+2$ ریشهٔ متمایز $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ است.
بنابر قضیهٔ رول، q' دارای $n+1$ ریشهٔ متمایز، q'' دارای n ریشهٔ متمایز و نهایتاً $q^{(n+1)}$ لااقل یک ریشهٔ حقیقی در $[a,b]$ دارد. بنابراین:

$$q^{(n+1)}(t) = P^{(n+1)}(t) + \lambda((t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n))^{(n+1)}$$

$$f^{(n+1)}(c) = 0 + \lambda(n+1)! \implies \lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

چون $P(t)$ چندجمله‌ای درجهٔ حداکثر n است، لذا مشتق $n+1$ـُم آن صفر است.
پس

$$q(t) = P(t) + \lambda(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)$$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

سؤال

تابع $y = \cos x$ را در نقاط $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ درون‌یابی می‌کنیم. حداکثر خطای درون‌یابی در این بازه کدام است؟

$n+1 = 3 \quad , \quad f(x) = \cos x$

$$f(x) = P(x) + \frac{f'''(c)}{3!}(x-0)(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})$$
$$E = |f(x) - P(x)| = \frac{\sin c}{6} \quad x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{6}\, x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x \implies f''(x) = -\cos x \implies f'''(x) = \sin x$$

مثلاً در $x = \frac{\pi}{6}$:

$$|E| \le \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{12} \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^3}{1296}$$

۵. درون‌یابی اسپلاین

همان‌طور که در مبحث قبل گذشته به آن اشاره شد، خطای برازش چندجمله‌ای به‌صورت زیر است:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

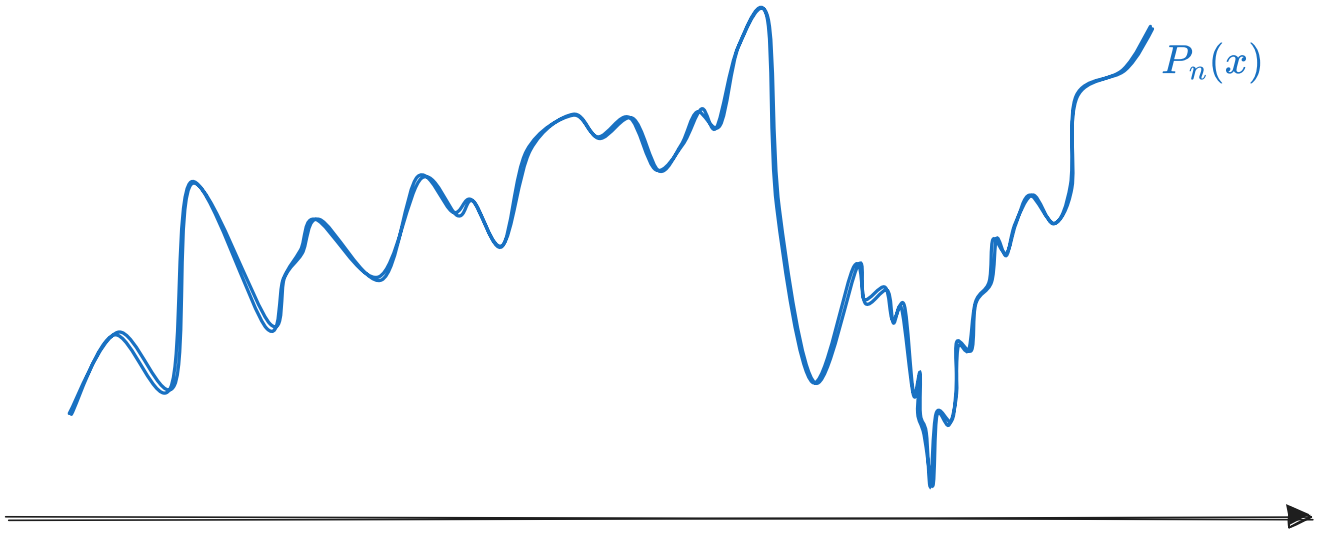
که در آن $\prod_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

مسلماً به نظر می‌رسد در خطای درون‌یابی ۳ فاکتور وجود دارد:

1. $(n+1)!$
2. $\prod_n(x)$
3. $f^{(n+1)}(x)$

- برای کنترل خطا و کاهش آن، افزایش n باعث کاهش خطا نمی‌شود (یعنی تعداد نقاط را اگر افزایش دهیم).
- با انتخاب نقاط مناسب $x_0, x_1, \dots, x_n$ می‌توان $\prod_n(x)$ را در بازهٔ $[x_0, x_n]$ به حداقل رساند (بهترین تقریب).
- اما $f^{(n+1)}$ در اغلب توابع دردسرساز است؛ یعنی افزایش n اگرچه فاکتورهای اول و دوم را کاهش می‌دهد ولی فاکتور سوم به‌تنهایی می‌تواند باعث بروز خطای بسیار زیادی شود.

لذا انتخاب n بزرگ در بسیاری از موارد چاره‌ساز نیست؛ یعنی باید درون‌یابی را چنان انجام دهیم که درجهٔ چندجمله‌ای بزرگ نشود. یکی از راه‌حل‌های این مسئله استفاده از توابع تکه‌ای هموار (**اسپلاین** یا **Spline**) است.



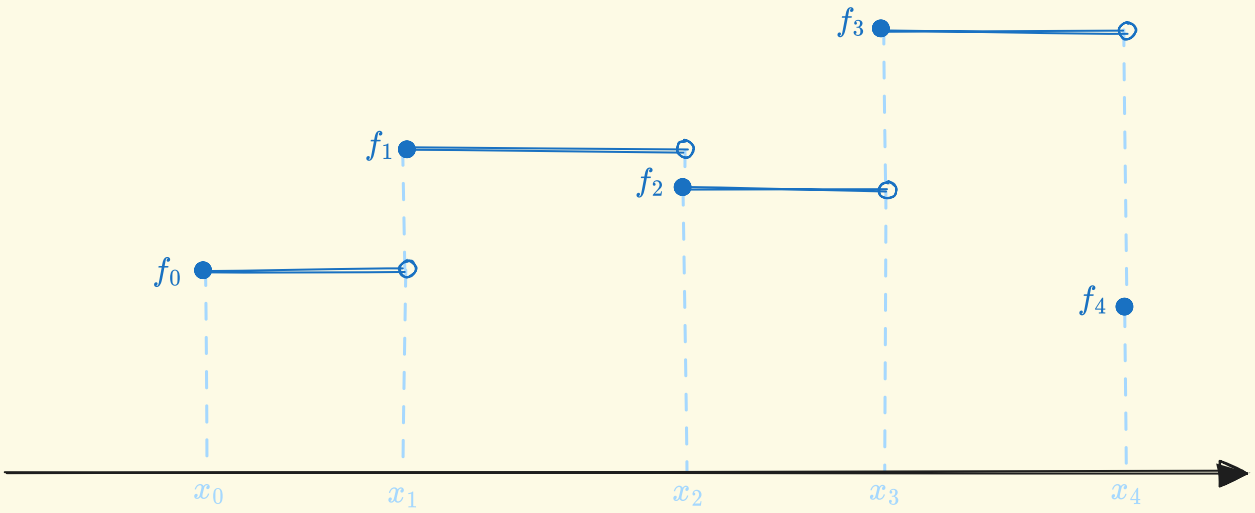
فرض کنیم $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ مفروض باشند. تابع $S_{k_0}(x)$ را در بازهٔ $[x_0, x_i]$، $S_{k,i}(x)$ را در بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ چنان انتخاب کنیم که

$$\begin{cases} S_{k,i-1}^{(r)}(x_i-) = S_{k,i}^{(r)}(x_i+) & r = 0, 1, \ldots, k-1 \\ S_{k,i-1}(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad S_{k,i}(x_i) = f_i \end{cases}$$

به بیان ساده‌تر، چندجمله‌ای‌های تعریف شده در هر بازه، مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ خود درون‌یابی کنند؛ پس در نقاط گرهی هموار از درجهٔ k باشند.

مثال

اسپلاین ثابت:

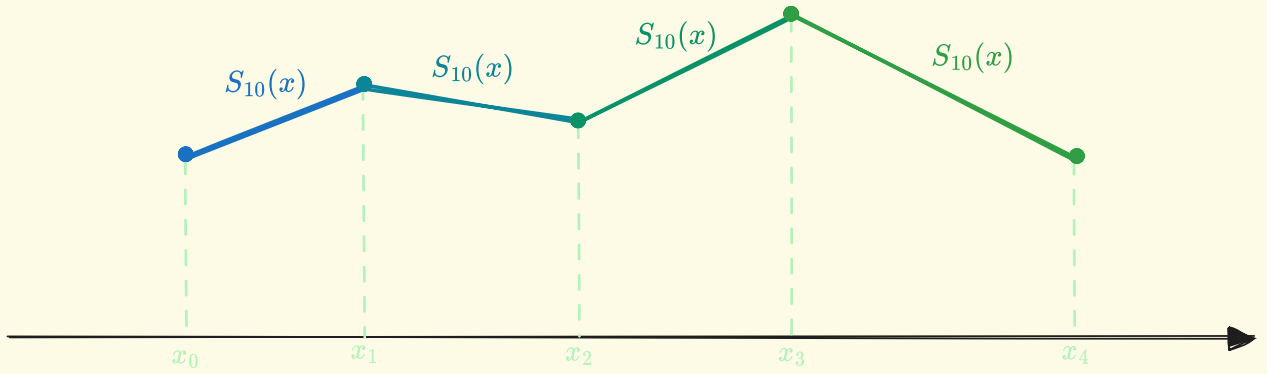


$$\begin{cases} S_{00}(x) = f_0 & x_0 \le x < x_1 \\ S_{01}(x) = f_1 & x_1 \le x < x_2 \\ S_{03}(x) = f_2 & x_2 \le x < x_3 \\ S_{03}(x) = f_3 & x_3 \le x < 4 \end{cases} \implies S_0(x) = \begin{cases} f_0 & x_0 \le x < x_1 \\ f_1 & x_1 \le x < x_2 \\ f_2 & x_2 \le x < x_3 \\ f_3 & x_3 \le x < x_4 \\ f_4 & x = x_4 \end{cases}$$

اسپلاین ثابت تابع را در نقاط درون‌یابی می‌کند ولی پیوسته نیست (درجهٔ همواری آن صفر است).

مثال

اسپلاین خطی:



$$\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ f_{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_k \\ f_k \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{y - f_k}{x - x_k} = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

$$y = \left(\frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right)(x - x_k) + f_k$$

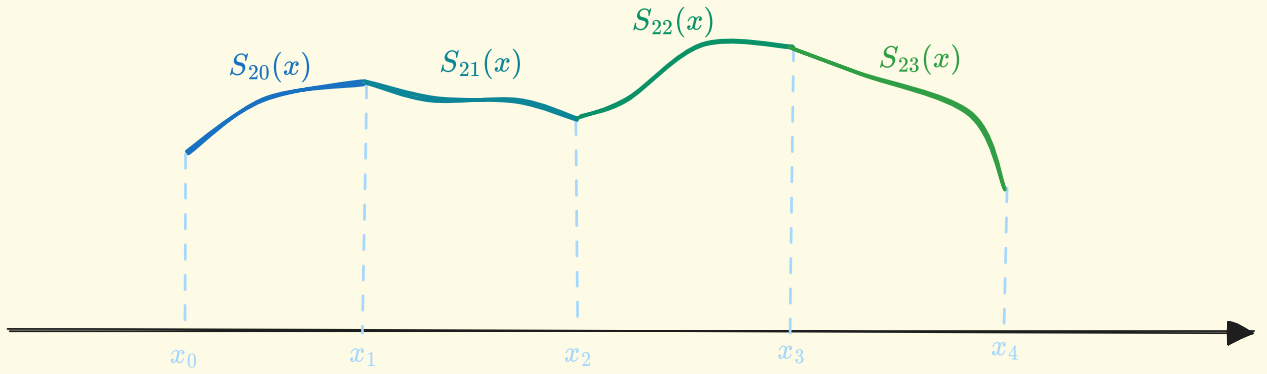
$$S_{10}(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f_0 \quad x_0 \le x \le x_1$$

$$S_{11}(x) = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f_1 \quad x_1 \le x \le x_2$$

۱) عناصر محدود در حل مسائل دیفرانسیل
۲) موجک‌ها Wavelet (آتش‌نشانی، رادارها، امواج دیجیتال)

مثال

اسپلاین مربعی:



می‌خواهیم تابع $f(x)$ را با استفاده از یک اسپلاین مربعی $S(x)$ روی نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ درونیابی کنیم. تابع اسپلاین در هر بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

با توجه به شرط $S_i(x_i) = f_i$، اگر $x = x_i$ را در معادلهٔ بالا قرار دهیم، جملات شامل b_i و c_i صفر می‌شوند:

$$S_i(x_i) = a_i + b_i(0) + c_i(0)^2 = f_i \implies a_i = f_i$$

بنابراین، تمام ضرایب a_i برابر با مقدار تابع در ابتدای همان بازه هستند.

در نقطهٔ اتصال x_1، دو چندجمله‌ای $S_0(x)$ (مربوط به بازهٔ اول) و $S_1(x)$ (مربوط به بازهٔ دوم) به هم می‌رسند.

پیوستگی تابع (S): مقدار اسپلاین اول در انتهای بازه‌اش باید برابر با مقدار داده شده f_1 باشد:

$$S_0(x_1) = f_1$$

با جای‌گذاری x_1 در معادله S_0 و دانستن این‌که $a_0 = f_0$:

$$f_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = f_1$$

پیوستگی مشتق (S'): برای این‌که منحنی هموار باشد، مشتق چپ و راست در نقطه x_1 باید برابر باشند.

- مشتق چپ در x_1:

$$S_0'(x_1) = b_0 + 2c_0(x_1 - x_0)$$

- مشتق راست در x_1:

$$S_1'(x_1) = b_1 + 2c_1(0) = b_1$$

با برابر قرار دادن این دو مقدار:

$$b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) = b_1$$

مشابه مرحلهٔ قبل، اسپلاین دوم $S_1(x)$ باید در انتهای بازه‌اش به نقطهٔ f_2 برسد:

$$S_1(x_2) = f_2$$

با جای‌گذاری x_2 در معادله S_1 و دانستن این‌که $a_1 = f_1$:

$$f_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = f_2$$

با تکرار این روند برای تمام بازه‌ها، دستگاه معادلاتی به دست می‌آید که می‌توان ضرایب مجهول b_i و c_i را محاسبه کرد.

سؤال

درون‌یابی اسپلاین مربعی تابع جدولی زیر را بیابید به شرط آن‌که $S_3'(0) = 4$.

x	0	1	2	4
f	-1	2	0	3

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = -1 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 & 0 \le x \le 1 \\ S_1(x) = 2 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \\ S_2(x) = 0 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

مشتق این توابع ($S'(x)$) نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} S_0'(x) = b_0 + 2c_0(x) \\ S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x-1) \\ S_2'(x) = b_2 + 2c_2(x-2) \end{cases}$$

طبق صورت سوال $S'(0) = 4$. با جای‌گذاری در مشتق $S_0(x)$ در $x = 0$:

$$S_0'(0) = b_0 = 4$$
$$S_0(1) = S_1(1) \implies -1 + b_0(1) + c_0(1)^2 = 2 \implies b_0 + c_0 = 3 \xRightarrow{b_0=4} c_0 = -1$$
$$S_0'(1) = S_1'(1) \implies b_0 + 2c_0(1) = b_1 \implies b_0 + 2c_0 = b_1 \xRightarrow{b_0=4, c_0=-1} b_1 = 2$$
$$S_1(2) = S_2(2) \implies 2 + b_1(2-1) + c_1(2-1)^2 = 0 \implies b_1 + c_1 = -2 \xRightarrow{b_1=2} c_1 = -4$$
$$S_1'(2) = S_2'(2) \implies b_1 + 2c_1(2-1) = b_2 \implies b_1 + 2c_1 = b_2 \xRightarrow{b_1=2, c_1=-4} b_2 = -6$$
$$S_2(4) = 3 \implies 0 + b_2(4-2) + c_2(4-2)^2 = 3 \implies 2b_2 + 4c_2 = 3 \xRightarrow{b_2=-6} c_2 = \frac{15}{4} = 3.75$$

با جای‌گذاری ضرایب به دست آمده در معادله اصلی، اسپلاین مربعی نهایی عبارت است از:

$$S(x) = \begin{cases} -1 + 4x - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \\ -6(x-2) + 3.75(x-2)^2 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

نکته

برای این‌که درون‌یابی اسپلاین مکعبی منحصربه‌فرد باشد، لازم است که دو شرط به مسئله اضافه شود. گاهی اوقات افزودن این دو شرط به تابع جدولی به از بین رفتن جواب‌ها منجر می‌شود. لذا در اغلب موارد از یکی از ۳ حالت زیر استفاده می‌شود:

1. اسپلاین طبیعی:

$$S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$$

2. اسپلاین گیره (Clamped):

$$S_3'(x_0) = f_0', \quad S_3'(x_n) = f_n'$$

3. اسپلاین تناوبی:

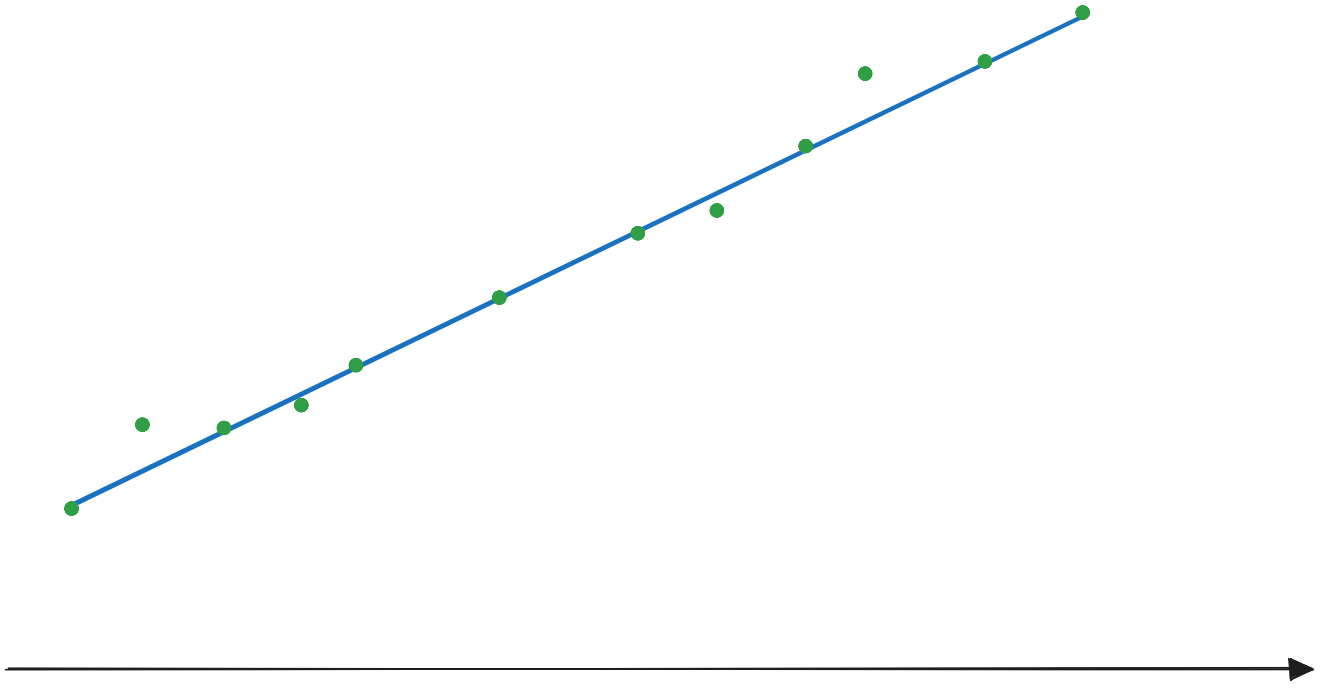
$$\begin{cases} S_3(x_0) = S_3(x_n) \\ S_3'(x_0) = S_3'(x_n) \\ S_3''(x_0) = S_3''(x_n) \end{cases}$$

نتیجه (فرم کلی اسپلاین مکعبی):

$$S_3(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \\ \dots & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

۶. برازش منحنی‌ها به روش کمترین مربعات

همان‌طور که بیان شد، بزرگ شدن تعداد نقاط درون‌یابی باعث بروز مشکلات فراوانی در بحث دقت محاسبات خواهد شد. هم‌چنین، خطای درون‌یابی متأثر از مشتق مرتبهٔ $n+1$ بوده و گاهی باعث زیاد شدن خطا می‌شود. اگر حجم داده‌ها خیلی زیاد باشد، استفاده از روش‌های درون‌یابی کارآمد نخواهد بود. به جای آن، یک تابع ازپیش‌تعریف‌شده که بر اساس تجربه به دست آمده‌است با پارامترهای مجهول انتخاب می‌کنیم.



سپس پارامترهای مجهول را چنان می‌یابیم که تابع پیشنهادی بهترین تابع باشد، یعنی مقدار $\sum_{i=1}^{N}(f_i-y_i)^2$ حداقل شود. به این تابع، مجموع مربعات خطا گفته می‌شود. می‌توان از تابع $\sum_{i=1}^{N}|f_i-y_i|$ نیز استفاده کرد؛ اما استفاده از مجموع مربعات بهتر است زیرا

1. مجموع مربعات خطا به واریانس داده‌ها وابسته است.
2. مجموع اندازه خطا به میانگین خطا داده‌ها وابسته است.

فرض کنید بخواهیم تابع موردنظر یک خط راست به صورت $y=ax+b$ برای تابع جدولی $\{(x_i,f_i)\}_{i=1}^{N}$ باشد. برای یافتن ضرایب مجهول a و b به طوری که خط پیشنهادی بهترین برازش منحنی برای این داده‌ها باشد به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا مجموع مربعات خطا را تشکیل می‌دهیم:

$$E(a,b)=\sum_{i=1}^{N}(ax_i+b-f_i)^2$$

سپس برای یافتن مینیمم تابع E نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم، یعنی:

$$\nabla E(a,b)=(0,0)\implies\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial a}=0\\[2mm]\dfrac{\partial E}{\partial b}=0\end{cases}$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{N}(ax_i+b-f_i)x_i=0\implies a\sum_{i=1}^{N}x_i^2+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}f_ix_i\\[2mm]\dfrac{\partial E}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{N}(ax_i+b-f_i)(1)=0\implies a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}1=\sum_{i=1}^{N}f_i\end{cases}$$

یک دستگاه معادلات، دو معادله و دو مجهول بر حسب a و b حاصل می‌شود که از حل آن مقادیر مجهول a و b حاصل می‌شوند.

سؤال

بهترین برازش خطی تابع جدولی زیر را بیابید و تقریب تابع را در $x = 2.2$ به دست آورید.

x	-1	0	1	2	4	5	10
f	2	4	-1	6	0	3	7

جدول محاسبات برای $N = 7$:

x	-1	0	1	2	4	5	10	21
f	2	4	-1	6	0	3	7	21
x_i^2	1	0	1	4	16	25	100	147
$f_i x_i$	-2	0	-1	12	0	15	70	94

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum f_i x_i \\ a\sum x_i + b\sum 1 = \sum f_i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 147a + 21b = 94 \\ 21a + 7b = 21 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{31}{84} \\ b = \dfrac{53}{28} \end{cases}$$

معادلهٔ خط برازش:

$$y = \frac{31}{84}x + \frac{53}{28}$$

تقریب در نقطهٔ $x = 2.2$:

$$y(2.2) = \frac{31 \times 2.2}{84} + \frac{53}{28}$$

سؤال

بهترین برازش سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را برای تابع جدولی سؤال قبلی بیابید.

تابع خطا:

$$E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{N}(ax_i^2 + bx_i + c - f_i)^2$$

شرط مینیمم‌سازی ($\nabla E = 0$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = 0 \Longrightarrow \sum(ax_i^2 + bx_i + c - f_i)x_i^2 = 0 \Longrightarrow a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum f_i x_i^2 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0 \Longrightarrow \sum(ax_i^2 + bx_i + c - f_i)x_i = 0 \Longrightarrow a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum f_i x_i \\ \dfrac{\partial E}{\partial c} = 0 \Longrightarrow \sum(ax_i^2 + bx_i + c - f_i)(1) = 0 \Longrightarrow a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\sum 1 = \sum f_i \end{cases}$$

جدول محاسبات:

x	-1	0	1	2	4	5	10	21
f	2	4	-1	6	0	3	7	21
x_i^4	1	0	1	16	256	625	10000	10899
x_i^3	-1	0	1	8	64	125	1000	1197
x_i^2	1	0	1	4	16	25	100	147
$f_i x_i^2$	2	0	-1	24	0	75	700	800
$f_i x_i$	-2	0	-1	12	0	15	70	94

جای‌گذاری در دستگاه:

$$\begin{cases} 10899a + 1197b + 147c = 800 \\ 1197a + 147b + 21c = 94 \\ 147a + 21b + 7c = 21 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2369}{21420} \\ b = -\dfrac{83}{102} \\ c = \dfrac{27619}{7140} \end{cases}$$

معادلهٔ سهمی برازش:

$$y = \frac{2369}{21420}x^2 - \frac{83}{102}x + \frac{27619}{7140}$$

۷. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

مشتق‌گیری عددی

فرض کنیم تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ داده شده باشد. می‌خواهیم مقدار تقریبی مشتق تابع جدولی را در یک نقطهٔ واقع در بازهٔ تعریف، به دست آوریم.

روش ۱

فرض کنیم $P_n(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ باشد. در این صورت

$$f'(x) \cong P'(x)$$

روش ۲

فرض کنیم $S_{1i}(x)$ چندجمله‌ای خطی درون‌یاب تابع f در نقاط $\{(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})\}$ باشد. در این صورت

$$f'(x) \cong S'_{1i}(x)$$

روش ۳

در حالت خاص، بازهٔ $[a, b]$ را به n قسمت مساوی با طول گام $h = \dfrac{b-a}{n}$ افراز می‌کنیم. قرار می‌دهیم $x_i = a + ih$ که در آن، $i = 0, 1, \ldots, n$. در این صورت، با استفاده از بسط تیلور می‌توان تقریب مشتق تابع f را در نقاط گرهی x_i به دست آورد.

روش تفاضلات پیشرو

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(c_1)$$

که در آن c_1 بین x_i و x_{i+1} است.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2!}f''(c_1)}_{O(h)}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

روش تفاضلات پسرو

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(c_2)$$

که در آن c_2 بین x_{i-1} و x_i است.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \underbrace{\frac{h}{2}f''(c_2)}_{O(h)}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$

مشتق به روش تفاضلات پسرو

روش تفاضلات مرکزی

$$\left.\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1) \quad x_i < c_1 < x_{i+1} \\ f(x_{i-1}) &= f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(c_1) \quad x_{i-1} < c_2 < x_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{12}(f'''(c_1) - f'''(c_2))}_{O(h^2)}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

سؤال

فرمول تقریبی برای مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_i را با مرتبهٔ دقت $O(h^4)$ به‌دست آورید. فرض کنید فاصلهٔ بین نقاط برابر و معادل h است.

ابتدا بسط تیلور تابع f را حول نقطه x_i برای چهار نقطه مذکور می‌نویسیم. برای هر سطر ضریبی مجهول (α_1 تا α_4) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 : f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2}f''(x_i) + \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(c_1) \\ \alpha_2 : f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2) \\ \alpha_3 : f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_3) \\ \alpha_4 : f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2}f''(x_i) - \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(c_4) \end{cases}$$

هدف یافتن ترکیب خطی از این جملات است که مشتقات مرتبه دوم تا چهارم را حذف کرده و تنها $f'(x_i)$ باقی بماند. رابطه کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f'(x_i) = \frac{\alpha_1 f_{i+2} + \alpha_2 f_{i+1} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) f_i + \alpha_3 f_{i-1} + \alpha_4 f_{i-2}}{(2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4)h} - \text{Error Terms}$$

که جملات خطا به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &-\frac{h}{2}\left(\frac{4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4}{2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4}\right) f''(x_i) \\ &+\frac{h^2}{6}\left(\frac{8\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 8\alpha_4}{2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4}\right) f'''(x_i) \\ &+\frac{h^3}{24}\left(\frac{16\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 16\alpha_4}{2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4}\right) f^{(4)}(x_i) \end{aligned}$$

برای داشتن مرتبهٔ دقت بالا، ضرایب مربوط به $f''(x_i)$، $f'''(x_i)$ و $f^{(4)}(x_i)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ 8\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 8\alpha_4 = 0 \\ 16\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 16\alpha_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[s=\alpha_2+\alpha_3]{t=\alpha_1+\alpha_4} \begin{cases} 4t + s = 0 \\ 16t + s = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 0 \implies \alpha_4 = -\alpha_1 \\ s = 0 \implies \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$$8\alpha_1 + \alpha_2 - (-\alpha_2) - 8(-\alpha_1) = 0 \implies 16\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \implies \alpha_2 = -8\alpha_1$$

با فرض $\alpha_1 = 1$ داریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -8 \\ \alpha_3 = 8 \\ \alpha_4 = -1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری در رابطه اصلی، فرمول تفاضل مرکزی مرتبهٔ چهارم برای مشتق اول حاصل می‌شود:

$$f'(x_i) \approx \frac{1 \cdot f_{i+2} - 8 \cdot f_{i+1} + 8 \cdot f_{i-1} - 1 \cdot f_{i-2}}{-12h}$$

بنابراین:

$$f'(x_i) = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

نقاط غیرمتساوی‌الفاصله

$$\left.\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + h_2 f'(x_i) + \frac{h_2^2}{2}f''(c_1) \quad x_i < c_1 < x_{i+1} \\ f(x_{i-1}) &= f(x_i) - h_1 f'(x_i) + \frac{h_1^2}{2}f''(c_2) \quad x_{i-1} < c_2 < x_i \end{aligned}\right\} \implies$$

$$h_1 f(x_{i+1}) - h_2 f(x_{i-1}) = (h_1 - h_2) f(x_i) + 2h_1 h_2 f'(x_i) + \frac{h_1 h_2}{2}(h_2 f''(c_1) - h_1 f''(c_2)) \implies$$

$$f'(x_i) = \frac{h_1 f_{i+1} + (h_2 - h_1) f_i - h_2 f_{i-1}}{2h_1 h_2} - \frac{h_2 f''(c_1 - h_1 f''(c_2))}{4}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{h_1 f_{i+1} + (h_2 - h_1) f_i - h_2 f_{i-1}}{2h_1 h_2}$$

سؤال

رابطهٔ زیر برای نقاط متساوی‌الفاصله با طول گام h برقرار است:

$$f''(x_i) \approx \frac{\alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1}}{h^2}$$

1. **ضرایب مجهول α، β و γ را بیابید و مرتبهٔ خطا را تعیین کنید.**
2. **آیا می‌توان α، β و γ را چنان تعیین کرد که مرتبهٔ خطا بالاترین مرتبه باشد؟**

ابتدا بسط تیلور توابع $f(x_{i+1})$ و $f(x_{i-1})$ را حول نقطه x_i می‌نویسیم:

$$\gamma\left(f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)\right); \quad x_i < c_1 < x_{i+1}$$
$$\alpha\left(f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)\right); \quad x_{i-1} < c_2 < x_i$$

حال عبارت داده‌شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\alpha f_{i-1} + \gamma f_{i+1} + \beta f_i}{h^2} = \underbrace{\frac{1}{h^2}(\alpha+\gamma+\beta)}_{\text{Should be 0}} f_i + \underbrace{\frac{1}{h}(\gamma-\alpha)}_{\text{Should be 0}} f'(x_i) + \underbrace{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}_{\text{Should be 1}} f''(x_i) + \underbrace{\frac{h}{6}(\gamma-\alpha)}_{\text{Should be 0}} f'''(x_i) + \dots$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \gamma-\alpha = 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در بسط تیلور، جملات باقی‌مانده (خطا) را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = 0 + 0 + f''(x_i) + 0 + \frac{h^2}{24}\left(f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)\right)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانی داریم:

$$f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2) = 2f^{(4)}(c); \quad x_{i-1} < c < x_{i+1}$$

بنابراین عبارت نهایی به‌صورت زیر می‌شود:

$$f''(x_i) + \frac{h^2}{24}(2f^{(4)}(c)) = f''(x_i) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

بنابراین مرتبهٔ خطا از نوع $O(h^2)$ است.

روش تستی:
فرض می‌کنیم این رابطه باید برای چندجمله‌ای‌های پایه $f(x) = 1$، $f(x) = x$ و $f(x) = x^2$ به‌صورت دقیق برقرار باشد.

فرض $f(x) = 1$: در این حالت مشتق دوم برابر صفر است ($f''(x) = 0$).

$$0 = \frac{\alpha(1) + \beta(1) + \gamma(1)}{h^2} \implies \frac{\alpha+\beta+\gamma}{h^2} = 0 \implies \alpha+\beta+\gamma = 0$$

فرض $f(x) = x$: در این حالت مشتق دوم برابر صفر است ($f''(x) = 0$). مقادیر تابع در نقاط گرهی برابر $x_k = kh$ است.

$$0 = \frac{\alpha(i-1)h + \beta(ih) + \gamma(i+1)h}{h^2} \implies 0 = \frac{1}{h}\left(i(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{0}) + (-\alpha+\gamma)\right)$$
$$\implies -\alpha+\gamma = 0$$

فرض $f(x) = x^2$: در این حالت مشتق دوم برابر ۲ است ($f''(x) = 2$). مقادیر تابع برابر $(kh)^2$ است.

$$2 = \frac{\alpha(i-1)^2h^2 + \beta(ih)^2 + \gamma(i+1)^2h^2}{h^2} \implies 2 = (\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{0})i^2 + (\underbrace{-2\alpha+2\gamma}_{0})i + (\alpha+\gamma)$$
$$\implies \alpha+\gamma = 2$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -\alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\gamma = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

انتگرال‌گیری عددی

هدف: محاسبه انتگرال معین تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$:

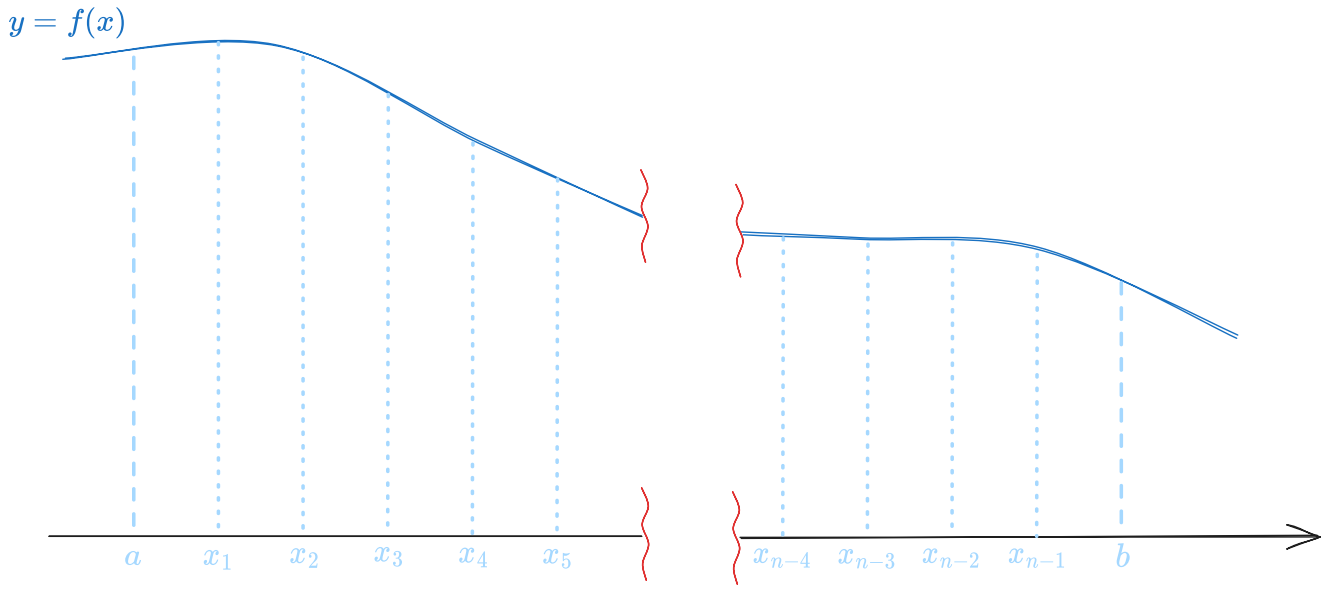
$$\int_a^b f(x)dx$$

برای شروع، بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (تعداد تقسیمات n). طول گام h به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

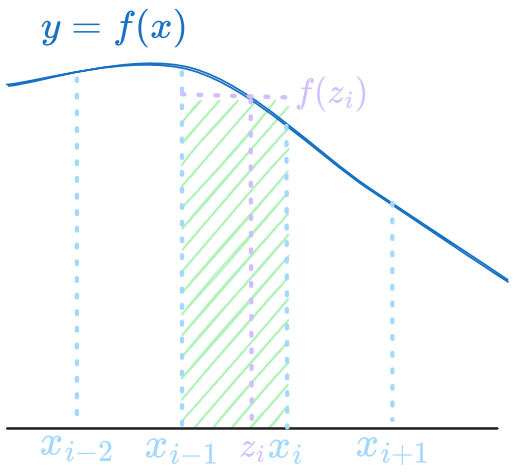
نقاط گرهی (نقاط تقسیم) عبارتند از:

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$



حد مجموع (انتگرال ریمان)

در این روش از تعریف انتگرال ریمان استفاده می‌کنیم. مساحت زیر نمودار با مجموع مساحت مستطیل‌ها تقریب زده می‌شود.



برای بازهٔ کوچک $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx hf(z_i)$$

که در آن z_i نقطه‌ای دلخواه در بازهٔ مذکور است.
بنابراین برای کل بازه داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)$$

روش ۱: روش نقطهٔ میانی (Midpoint Rule)

اگر در فرمول انتگرال ریمان، نقطهٔ z_i را دقیقاً وسط بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ در نظر بگیریم، به روش نقطه میانی می‌رسیم.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

سؤال

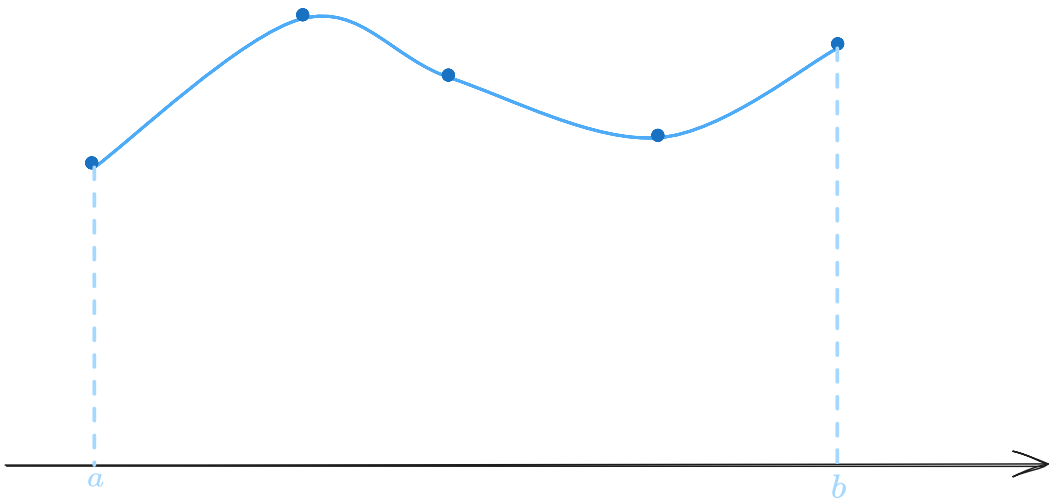
با استفاده از روش نقطه میانی، انتگرال $\int_1^2 x^2 dx$ را با گام $h = 0.25$ تقریب بزنید.

نقاط گرهی عبارتند از: $1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$.
نقاط میانی عبارتند از: $1.125, 1.375, 1.625, 1.875$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 dx &\approx 0.25(f(1.125) + f(1.375) + f(1.625) + f(1.875)) \\ &= 0.25((1.125)^2 + (1.375)^2 + (1.625)^2 + (1.875)^2) \\ &= 2.328125\end{aligned}$$

روش ۲: درون‌یابی سراسری

با استفاده از درون‌یابی یک چندجمله‌ای واحد برای کل بازه می‌یابیم و از آن انتگرال می‌گیریم.



روش ۳: درون‌یابی موضعی

روش ۳.۱: ذوزنقه (Trapezoidal Rule)

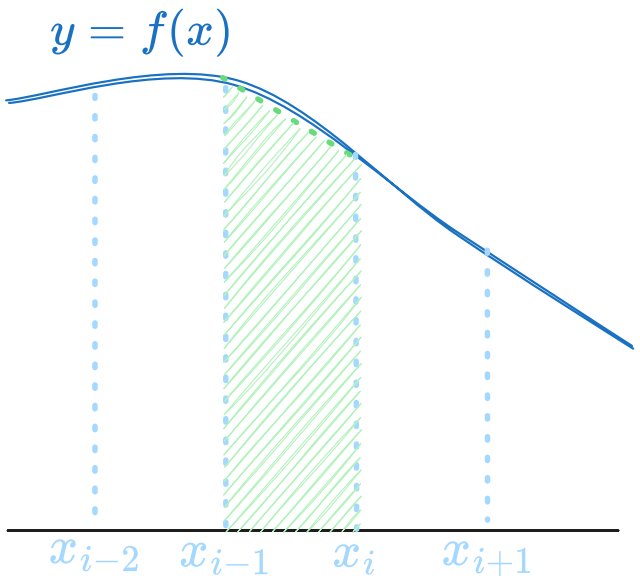
در این روش، در هر زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$، تابع $f(x)$ را با خط راستی که دو نقطهٔ (x_{i-1}, f_{i-1}) و (x_i, f_i) را به هم وصل می‌کند (درون‌یاب خطی)، تقریب می‌زنیم.

در این حالت بازهٔ $[a, b]$ را به n قسمت مساوی افراز می‌کنیم ($h = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + ih$). انتگرال کل برابر است با مجموع انتگرال‌ها روی زیربازه‌ها:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

مساحت تقریبی هر زیربازه (مساحت ذوزنقه):

$$S_i = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$



فرض کنیم $P_{1,i}(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب خطی تابع f در نقاط x_{i-1} و x_i باشد. با تغییر متغیر $x = x_{i-1} + \theta h$ (که در آن $0 \leq \theta \leq 1$ و $dx = hd\theta$)، چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(\theta) = f_{i-1} + \Delta f_{i-1}\theta = f_{i-1} + (f_i - f_{i-1})\theta$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{1,i}(x)dx &= \int_0^1 [f_{i-1} + (f_i - f_{i-1})\theta]hd\theta \\ &= h\left[f_{i-1}\theta + (f_i - f_{i-1})\frac{\theta^2}{2}\right]_0^1 \\ &= h\left(f_{i-1} + \frac{1}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1}\right) \\ &= \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)\end{aligned}$$

با جمع زدن تقریب‌های به دست آمده برای تمام زیربازه‌ها، فرمول **روش ذوزنقهٔ مرکب** به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \\ &= \frac{h}{2}(f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n)\end{aligned}$$

به فرم فشرده:

$$T(h) = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

مثال

با انتخاب طول گام $h = 0.25$ تقریبی از انتگرال زیر را به روش ذوزنقه بیابید.

$$I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \sin x dx$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
f	0	0.4079	0.9723	1.6206	2.2874

$$I \approx T(0.25) = \frac{0.25}{2}(0 + 2(0.4079 + 0.9723 + 1.6206) + 2.2874) = 1.0361$$

قضیه

فرض کنیم f تابعی پیوسته با مشتقات پیوسته تا مرتبهٔ دوم در بازهٔ $[a,b]$ باشد و $T(h)$ تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش ذوزنقه باشد. آن‌گاه خطای این روش برابر است با

$$ET(h) = \int_a^b f(x)dx - T(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c) \quad ; \qquad a \le c \le b$$

فرض کنیم $P_{1i}(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب خطی تابع f در نقاط x_i و x_{i+1} باشد. بنابر قضیهٔ خطای درون‌یابی، برای هر x در این بازه داریم

$$f(x) - P_{1i}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!} f''(c_i(x))$$

حال از طرفین در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ انتگرال می‌گیریم تا خطای روش در این زیربازه مشخص شود.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_{1i}(x))dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1}) f''(c_i(x))dx$$

قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها

اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد، عددی مانند c در $[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها

اگر f و g در $[a,b]$ پیوسته باشند و g در این بازه تغییر علامت ندهد، آن‌گاه عددی مانند c در $[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

از طرفی عبارت $(x-x_i)(x-x_{i+1})$ در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد (همواره نامثبت است) و طبق فرض، f'' تابعی پیوسته است. بنابر قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها داریم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_{1i}(x))dx = \frac{1}{2} f''(c_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال باقی‌مانده، از تغییر متغیر $x - x_i = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})dx &= \int_0^h t(t-h)dt \\
&= \int_0^h (t^2 - th)dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2 h}{2}\right]_0^h \\
&= \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right) \\
&= h^3\left(\frac{2-3}{6}\right) \\
&= -\frac{h^3}{6}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\text{Error}_i = \frac{1}{2} f''(c_i)\left(-\frac{h^3}{6}\right) = -\frac{h^3}{12} f''(c_i)$$

خطای کل برابر است با مجموع خطاها در تمام زیربازه‌ها، یعنی

$$E(T(h)) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{h^3}{12} f''(c_i)\right) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i)$$

چون f'' پیوسته است، بنابر قضیهٔ مقدار میانی، عددی مانند $c \in [a, b]$ وجود دارد به‌طوری‌که میانگین مقادیر مشتق دوم برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = nf''(c)$$

بنابراین

$$E(T(h)) = -\frac{h^3}{12}(nf''(c)) = -\frac{h^2}{12}(nh)f''(c) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c)$$

نتیجهٔ ۱: اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول باشد، روش ذوزنقه برای آن دقیق و بدون خطاست.
نتیجهٔ ۲: فرض کنیم M_2 یک کران بالای $|f''(x)|$ در $[a, b]$ باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} |ET(h)| &= \int_a^b f(x)dx - T(h) \\ &= -\frac{h^3}{12}(b-a)f''(c) \\ &\leq \frac{h^2}{12}(b-a)M_2 \end{aligned}$$

اگر بخواهیم تقریب انتگرال موردنظر را با دقت ϵ به دست آوریم، خواهیم داشت

$$\frac{h^2}{12}(b-a)M_2 < \epsilon \implies h \leq \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)M_2}}$$

سؤال

حداکثر طول گام h کدام باشد تا تقریب $\int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$ به روش ذوزنقه با دقت ۴ رقم اعشار دقیق باشد؟

$$\begin{aligned} &a = 0 \\ &b = 1 \\ &\epsilon = \frac{10^{-4}}{2} \\ &f(x) = e^{-x^2} \sin x \\ &f'(x) = e^{-x^2}(\cos x - 2x \sin x) \\ &f''(x) = ((4x^2 - 3)\sin x - 4x \cos x)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f''(x)| &\leq \left(\underbrace{|4x^2 - 3|}_{\leq 3}\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} + \underbrace{|4x|}_{\leq 4}\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1}\right)\underbrace{|e^{-x^2}|}_{\leq 1} \\ &\leq (3 \times 1 + 4 \times 1) \times 1 = 7 = M_2 \end{aligned}$$

$$\frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \leq \epsilon \implies h \leq \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)M_2}} \implies h \leq \sqrt{\frac{12 \times \frac{10^{-4}}{2}}{(1-0) \times 7}} \implies h \leq 0.0092$$

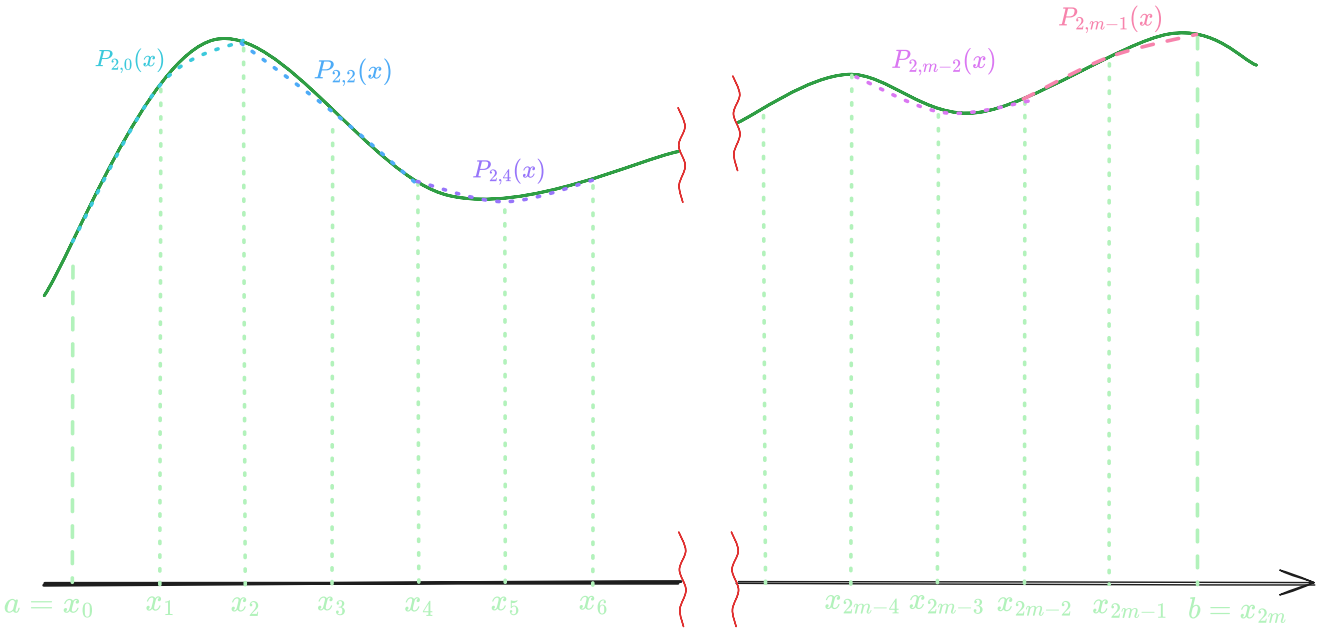
نکته

مقدار h به‌دست‌آمده بهینه نیست.

$$\begin{aligned} &n = \frac{1-0}{0.0092} = 108.6957 \\ &n_{\text{opt}} = \lceil n \rceil = 109 \implies h_{\text{opt}} = \frac{1-0}{109} \end{aligned}$$

روش ۳.۲: سیمپسون (Simpson's Method)

در روش سیمپسون بازهٔ $[a,b]$ را به $n=2m$ (تعداد زوج) زیربازهٔ با طول گام h افراز می‌کنیم. سپس به‌ازای $i=0,1,\dots,m-1$ تابع f را در نقاط $\{x_{2i},x_{2i+1},x_{2i+2}\}$ درون‌یابی می‌کنیم.



فرض کنیم $P_{2,i}$ چندجمله‌ای درون‌یاب مذکور باشد. از تقریب زیر استفاده می‌کنیم

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} f(x)dx \cong S_i(h) = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}(x)dx$$

برای یافتن معادلهٔ $P_{2i}(x)$ از فرمول تفاضلات پیشروی نیوتن استفاده می‌کنیم. با فرض تغییر متغیر $x=x_{2i}+\theta h$:

$$P_{2i}(x) = f_{2i} + \Delta f_{2i}\theta + \Delta^2 f_{2i}\frac{\theta(\theta-1)}{2!}$$

با جای‌گذاری در انتگرال داریم:

$$\begin{aligned}
S_i(h) &= \int_0^2 \left(f_{2i} + \Delta f_{2i}\theta + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_{2i}\right)hd\theta \\
&= h\left[f_{2i}\theta + \Delta f_{2i}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\Delta^2 f_{2i}}{2}(\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{2})\right]_0^2 \\
&= \frac{h}{3}(f_{2i}+4f_{2i+1}+f_{2i+2})
\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ انتگرال روی کل بازهٔ $[a,b]$، حاصل‌جمع انتگرال‌ها روی زیربازه‌های جفت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx S(h) \\
&= S_0(h)+S_1(h)+\cdots+S_{m-1}(h) \\
&= \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\cdots+\frac{h}{3}(f_{2m-2}+4f_{2m-1}+f_{2m}) \\
&= \frac{h}{3}(f_0+4\left(f_1+f_3+\cdots+f_{2m-1}\right)+2\left(f_2+f_4+\cdots+f_{2m-2}\right)+f_{2m})
\end{aligned}$$

سؤال

به روش سیمپسون با طول گام $h=0.25$ تقریبی از عبارت زیر را بیابید.

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}\sin x dx$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
f	0	0.2324	0.3734	0.3884	0.3096
Coeff.	1	4	2	4	1

$$S(0.25) = \frac{0.25}{3}(0 + 4(0.2324 + 0.3884) + 2(0.3734) + 0.3096) = 0.2950$$

قضیه

فرض کنیم f تابعی پیوسته، مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته تا مرتبهٔ ۴ در $[a, b]$ باشد و $S(h)$ تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد. آن‌گاه خطای آن برابر است با

$$ES(h) = \int_a^b f(x)dx - S(h) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(c) \quad ; \qquad a \le c \le b$$

نتیجهٔ ۱: با توجه به فرمول خطای فوق، درمی‌یابیم که روش سیمپسون برای چندجمله‌ای‌های با درجهٔ حداکثر ۳ دقیق است.
نتیجهٔ ۲: فرض کنیم M_4 یک کران بالای $|f^{(4)}(x)|$ در $[a, b]$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} |ES(h)| &= \int_a^b f(x)dx - S(h) \\ &= -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(c) \\ &< \frac{b-a}{180}h^4 M_4 \end{aligned}$$

اگر بخواهیم تقریب انتگرال موردنظر را با دقت ϵ به دست آوریم، خواهیم داشت

$$\frac{b-a}{180}h^4 M_4 < \epsilon \implies h \le \sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{(b-a)M_4}}$$

سؤال

می‌خواهیم تقریبی از $\int_0^\pi \sin x^3 dx$ را به روش سیمپسون با دقت ۸ رقم اعشار بیابیم. مقدار طول گام مناسب کدام است؟

- بازهٔ انتگرال‌گیری: $[a, b] = [0, \pi]$
- تابع: $f(x) = \sin(x^3)$
- دقت خطا: $E = \frac{10^{-8}}{2}$

برای استفاده از فرمول خطای سیمپسون، نیاز به کران بالای قدرمطلق مشتق چهارم تابع (M_4) در بازه $[0, \pi]$ داریم.

$f(x) = \sin(x^3)$
$f'(x) = 3x^2\cos(x^3)$
$f''(x) = 6x\cos(x^3) - 9x^4\sin(x^3)$
$f'''(x) = (6 - 27x^6)\cos(x^3) - 54x^3\sin(x^3)$
$f^{(4)}(x) = -324x^5\cos(x^3) + (81x^8 - 180x^2)\sin(x^3)$

برای محاسبهٔ ماکسیمم خطای ممکن در بازه $[0, \pi]$، باید کران بالای قدر مطلق مشتق چهارم را بیابیم:

$|f^{(4)}(x)| \le |-324x^5| + |81x^8 - 180x^2| \overset{?}{\Rightarrow} M_4 \approx 9872.5998$

می‌خواهیم خطا کمتر از E باشد، بنابراین:

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180 \times \frac{10^{-8}}{2}}{(\pi - 0) \times 9872.5998}} = \sqrt[4]{\frac{180 \times 0.5 \times 10^{-8}}{\pi \times 9872.5598}} \approx 0.002321$$

تعداد بازه‌ها از رابطهٔ $n = \dfrac{b-a}{h}$ به دست می‌آید:

$$n \geq \frac{\pi - 0}{0.002321} \approx 1352.5513 \implies n_{opt} = 1354$$

پس طول گام برابر است با $h = \dfrac{\pi}{1354}$.

روش ۳.۳: نیوتن-کاتس

فرض کنیم **نقاط گرهی (Nodal Points)** $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ در $[a, b]$ مفروض باشند. در این صورت می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n)$$

که در آن، مقادیر $w_1, w_2, \ldots, w_n$ را **وزن (Weight)** می‌نامند و این مقادیر در ابتدا مجهول هستند.

برای یافتن مقادیر وزن‌های مجهول (w_i)، از **روش ضریب‌های نامعین** استفاده می‌کنیم. به این صورت که توابع پایهٔ چندجمله‌ای ($1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$) را در فرمول تقریبی فوق قرار می‌دهیم (یعنی فرض می‌کنیم فرمول برای این چندجمله‌ای‌ها دقیق است). با این کار، یک دستگاه معادلات خطی استخراج می‌شود که با حل آن، وزن‌ها به دست می‌آیند.

مثال

می‌خواهیم تقریب زیر را برای انتگرال تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0, 1]$ داشته باشیم:

$$\int_0^1 f(x)dx \cong w_1 f(0.3) + w_2 f(0.4) + w_3 f(0.8)$$

برای این‌که فرمول انتگرال‌گیری برای چندجمله‌ای‌های درجه ۲ دقیق باشد، باید برای توابع پایه $f(x) = 1$، $f(x) = x$ و $f(x) = x^2$ به طور دقیق برقرار باشد. بنابراین سه معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 : \int_0^1 1dx &= [x]_0^1 = 1 \implies w_1(1) + w_2(1) + w_3(1) = 1 \implies w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\
f(x) = x : \int_0^1 xdx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \implies w_1(0.3) + w_2(0.4) + w_3(0.8) = \frac{1}{2} \\
f(x) = x^2 : \int_0^1 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \implies w_1(0.3)^2 + w_2(0.4)^2 + w_3(0.8)^2 = \frac{1}{3} \\
&\implies 0.09w_1 + 0.16w_2 + 0.64w_3 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

با کنار هم قرار دادن معادلات بالا، دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 \\ 0.09 & 0.16 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \implies \begin{cases} w_1 = \dfrac{64}{60} \approx 1.066 \\ w_2 = -\dfrac{35}{60} \approx -0.583 \\ w_3 = \dfrac{31}{60} \approx 0.516 \end{cases}$$

روش ۴: برون‌یابی ریچاردسون

برای محاسبهٔ انتگرال $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای با گام h، فرمول زیر را داشتیم:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b)\right] + ET(h)$$

که در آن $ET(h)$ خطای روش ذوزنقه‌ای است و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$ET(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c)$$

بسط مجانبی خطا

می‌توان مقدار واقعی انتگرال را برحسب تقریب ذوزنقه‌ای $T(h)$ و بسط خطای آن به‌صورت توان‌های زوج h نوشت:

$$I = T(h) + ET(h) = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \dots$$

در این‌جا $T(h)$ همان مقدار عددی حاصل از فرمول ذوزنقه‌ای با گام h است.

فرمول رامبرگ

در روش **رامبرگ**، برای حذف عبارات خطا و افزایش دقت، طول گام را نصف می‌کنیم ($h \to \frac{h}{2}$). دو رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

1. برای گام $\frac{h}{2}$:

$$I = T(\frac{h}{2}) + a_2(\frac{h}{2})^2 + a_4(\frac{h}{2})^4 + a_6(\frac{h}{2})^6 + \dots$$

2. برای گام h:

$$I = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \dots$$

برای حذف h^2 (که بزرگ‌ترین منبع خطاست)، عملیات $4 \times (1) - (2)$ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 3I &= 4T(\frac{h}{2}) - T(h) - \frac{3}{4}a_4h^4 - \frac{15}{16}a_6h^6 + \dots \\ \implies I &= \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} - \frac{1}{4}a_4h^4 - \frac{5}{16}a_6h^6 + \dots \end{aligned}$$

عبارت اصلی روش رامبرگ که با $R(h)$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$R(h) = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3}$$

نکته: این روش از مرتبهٔ $O(h^4)$ است، در حالی که روش ذوزنقه‌ای از مرتبهٔ $O(h^2)$ بود. با تکرار این فرایند (برون‌یابی‌های متوالی)، می‌توان به دقت‌های بسیار بالاتری دست یافت.

سؤال

تقریبی از انتگرال $\int_0^1 xe^{-2x}dx$ را با استفاده از دستور رامبرگ با انتخاب گام اولیهٔ $h = 0.5$ بیابید.

ابتدا مقادیر تابع $f(x) = xe^{-2x}$ را در نقاط موردنیاز با توجه به گام‌های $h_0 = 0.5$ و $h_1 = 0.25$ محاسبه می‌کنیم:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	0.1516	0.1839	0.1673	0.1353

$$\begin{aligned} T(h_0) = T(0.5) &= \frac{0.5}{2}(f(0) + 2f(0.5) + f(1)) \\ &= 0.25(0 + 2(0.1839) + 0.1353) \\ &= 0.1258 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(h_1) = T(0.25) &= \frac{0.25}{2}(f(0) + 2\big(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\big) + f(1)) \\ &= 0.125(0 + 2(0.1516 + 0.1839 + 0.1673) + 0.1353) \\ &= 0.1426 \end{aligned}$$

برای بهبود دقت، از فرمول رامبرگ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} R(h) &= \frac{4T(h_1) - T(h_0)}{3} \\ &= \frac{4(0.1426) - 0.1258}{3} \\ &= 0.1482 \end{aligned}$$

مقدار تقریبی به دست آمده از روش رامبرگ (0.1482) بسیار به مقدار دقیق (0.1485) نزدیک است.

تعمیم روش رامبرگ

فرض کنیم I مقدار واقعی انتگرال و $T(h)$ مقدار تقریب‌زده‌شده با روش ذوزنقه‌ای با گام h باشد.

$$I = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + a_8h^8 + \dots$$

با نصف کردن گام‌ها $(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \dots)$، تقریب‌های جدیدی (T_{00}, T_{01}, T_{02}) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I &= T_{00} = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \dots \\ I &= T_{01} = T(\frac{h}{2}) + a_2\frac{h^2}{4} + a_4\frac{h^4}{16} + \dots \\ I &= T_{02} = T(\frac{h}{4}) + a_2\frac{h^2}{16} + a_4\frac{h^4}{256} + \dots \end{aligned}$$

برای حذف جملهٔ شامل h^2، از ترکیب خطی T_{00} و T_{01} استفاده می‌کنیم:

$$4I - I = 4T_{01} - T_{00} + a_2(h^2 - h^2) + a_4(\frac{h^4}{4} - h^4) + \dots$$

که منجر به فرمول زیر برای T_{10} می‌شود (خطای این تقریب از مرتبهٔ $O(h^4)$ است):

$$I \approx \frac{4T_{01} - T_{00}}{3} = T_{10}$$

به طور مشابه برای T_{11} با استفاده از T_{01} و T_{02}:

$$I \approx \frac{4T_{02} - T_{01}}{3} = T_{11}$$

حال با داشتن T_{10} و T_{11} که خطای h^2 ندارند، می‌توانیم خطای h^4 را حذف کنیم تا به T_{20} برسیم (مرتبهٔ خطا $O(h^6)$):

$$T_{20} = \frac{16T_{11} - T_{10}}{15}$$

Step(h)	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$h_0 = h$	$T_{00} = T(h)$			
		$T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{3}$		
$h_1 = \frac{h}{2}$	$T_{01} = T(h_1)$		$T_{20} = \frac{4^2T_{11} - T_{10}}{4^2 - 1}$	
		$T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{3}$		$T_{30} = \frac{4^3T_{21} - T_{20}}{4^3 - 1}$
$h_2 = \frac{h}{4}$	$T_{02} = T(h_2)$		$T_{21} = \frac{4^2T_{12} - T_{11}}{4^2 - 1}$	
		$T_{12}\frac{16T_{11} - T_{10}}{15}$		
$h_3 = \frac{h}{8}$	$T_{03} = T(h_3)$			

نکته

اگر h_0 داده نشده بود، در نظر می‌گیریم $h_0 = b - a$.

سؤال

تقریبی از $\int_1^3 e^x dx$ را به روش رامبرگ مرتبهٔ ۶ بیابید.

ابتدا بازهٔ $[1,3]$ را با طول گام‌های $h_0 = 2$، $h_1 = 1$ و $h_2 = 0.5$ تقسیم‌بندی کرده و مقادیر تابع $f(x) = e^x$ را در نقاط موردنظر محاسبه می‌کنیم:

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	2.7183	4.4817	7.3891	12.1825	20.0855

مقادیر انتگرال را با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه برای هر گام h محاسبه می‌کنیم.

$$T_{00} = T(2) = \frac{2}{2}(f(1) + f(3)) = 1 \times (2.7183 + 20.0855) = 22.8038$$

$$T_{01} = T(1) = \frac{1}{2}(f(1) + 2f(2) + f(3)) = \frac{1}{2}(2.7183 + 2(7.3891) + 20.0855) = 18.791$$

$$\begin{aligned} T_{02} = T(0.5) &= \frac{0.5}{2}(f(1) + 2(f(1.5) + f(2) + f(2.5)) + f(3)) \\ &= 0.25 \times (2.7183 + 2(4.4817 + 7.3891 + 12.1825) + 20.0855) \\ &= 17.7276 \end{aligned}$$

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$T_{00} = 22.8038$		
	$T_{10} = \frac{4(18.791) - 22.8038}{3} = 17.4534$	
$T_{01} = 18.791$		$T_{20} = \frac{16(17.3731) - 17.4534}{15} = \boxed{17.3677}$
	$T_{11} = \frac{4(17.7276) - 18.791}{3} = 17.3731$	
$T_{02} = 17.7276$		

روش ۵: کوادراتور

در روش‌های قبلی، بازهٔ $[a,b]$ به n قسمت (مساوی یا نامساوی) تقسیم می‌شد و سپس انتگرال با عبارتی به‌صورت $I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ تقریب زده می‌شد. در این حالت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد معلومی در بازهٔ $[a,b]$ بودند.

اما در روش‌های کوادراتوری، علاوه بر وزن‌های w_i، خودِ گره‌های x_i نیز به‌عنوان مجهول در نظر گرفته می‌شوند. در این روش می‌توان ثابت کرد که بر اساس وزن تابع موردنظر می‌توان از چندجمله‌ای‌های متعامد استفاده کرد. اگر از $\int_a^b f(x)w(x)dx$ که در آن $w(x)$ تابع وزن است، استفاده کنیم، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های متعامد عبارتند از:

نام تابع	چندجمله‌ای متعامد $P_n(x)$	تابع وزن $w(x)$	بازهٔ $[a,b]$
تابع ژاکوبی (Jacobi)	$J_n(x)$	x (یا خاص)	$[0,1]$
تابع لژاندر (Legendre)	$P_n(x)$	1	$[-1,1]$
تابع چبیشف (Chebyshev)	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$
تابع لاگور (Laguerre)	$L_n(x)$	e^{-x}	$[0,\infty)$
تابع هرمیت (Hermite)	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$(-\infty,+\infty)$

روش لژاندر (Legendre)

در این درس، تمرکز ما بر بازهٔ $[-1,1]$ و تابع وزن $w(x) = 1$ است. همان‌طور که در جدول بالا اشاره شد، چندجمله‌ای‌های متعامد مربوط به این حالت، **چندجمله‌ای‌های لژاندر** هستند.

فرمول رودریگز (Rodrigues' Formula)

برای به دست آوردن چندجمله‌ای‌های لژاندر از فرمول بازگشتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

1. **محاسبهٔ $P_0(x)$:**

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}(x^2-1)^0 = 1$$

2. **محاسبهٔ** $P_1(x)$:

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1)^1 = \frac{1}{2}(2x) = x$$

3. **محاسبهٔ** $P_2(x)$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

ثابت می‌شود اگر بخواهیم از روش کوادراتوری nنقطه‌ای استفاده کنیم، باید ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد متناظر با آن بازه از درجهٔ n استفاده کنیم.

نتیجه: روش کوادراتوری nنقطه‌ای، برای حل انتگرال چندجمله‌ای‌هایی با درجهٔ حداکثر $2n-1$ دقیق است.

سؤال

تقریبی از انتگرال زیر را به روش کوادراتورهای دونقطه‌ای گوسی بیابید.

$$I = \int_1^4 x^5 e^{2x} dx$$

روش کوادراتوری گوس-لژاندر معمولاً بر روی بازهٔ $[-1,1]$ تعریف می‌شوند. بنابراین، ابتدا باید بازهٔ انتگرال‌گیری $[1,4]$ را به بازهٔ $[-1,1]$ تبدیل کنیم. برای تبدیل متغیر $x \in [a,b]$ به $t \in [-1,1]$ از تبدیل خطی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{t-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x-a}{b-a} &\implies \frac{t+1}{2} = \frac{x-1}{4-1}\\ &\implies t+1 = \frac{2}{3}(x-1)\\ &\implies t = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر بالا در انتگرال اصلی:

$$\begin{aligned}I &= \int_1^4 x^5 e^{2x} dx\\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}\right)^5 e^{2\left(\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}\right)} \left(\frac{3}{2}dt\right)\\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}\right) e^{3t+5} dt\end{aligned}$$

چون از روش دونقطه‌ای استفاده می‌کنیم، باید از ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر درجهٔ دوم ($P_2(t)$) استفاده کنیم.

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1) = 0 \implies t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \implies \begin{cases} t_1 = -0.5774 \\ t_2 = +0.5774 \end{cases}$$

برای روش دونقطه‌ای فرمول به‌صورت $\int_{-1}^1 f(t)dt \approx w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$ است. برای یافتن w_1 و w_2، این فرمول باید برای چندجمله‌ای‌های پایه ($f(t)=1$ و $f(t)=t$) دقیق باشد:

$$\begin{cases} f(t)=1: \int_{-1}^1 1dt = 2 \implies w_1(1) + w_2(1) = 2 \implies w_1 + w_2 = 2 \\ f(t)=t: \int_{-1}^1 tdt = 0 \implies w_1(-0.5774) + w_2(0.5774) = 0 \implies w_1 = w_2 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین فرمول تقریبی نهایی برای بخش داخل انتگرال استاندارد عبارت است از:

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx g(-0.5774) + g(0.5774)$$

بنابراین:

$$I \approx \frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}(-0.5774) + \frac{5}{2}\right)e^{3(-0.5774)+5} + \left(\frac{3}{2}(0.5774) + \frac{5}{2}\right)e^{3(0.5774)+5}\right]$$